

ESPOCH
2018

MATEMÁTICA LÚDICA

MATEMÁTICA LÚDICA

Jorge V. Tuapanta



DIRECCIÓN DE
PUBLICACIONES



MATEMÁTICA LÚDICA

© 2018 Jorge V Tuapanta

© 2018 Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (Espoch)

Panamericana Sur, kilómetro 1 $\frac{1}{2}$
Dirección de Publicaciones Científicas
Riobamba, Ecuador
Teléfono: 593 (3) 2998200
Código Postal: EC060155

Aval Espoch

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego (*peer review*).

Corrección y diseño:
La Caracola Editores

Impreso en Ecuador

Prohibida la reproducción de este libro, por cualquier medio, sin la previa autorización por escrito de los propietarios del *Copyright*.

CDU: 51-8 + 511 + 512
Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo
Dirección de Publicaciones, año 2018
91 pp. vol: 17 x 24 cm
ISBN: 9787-9942-35-169-2
1. Razonamiento lógico
2. Razonamiento matemático
3. Razonamiento numérico

CONTENIDO GENERAL

MATEMÁTICA LÚDICA.....	10
Introducción	10
1.RAZONAMIENTO LÓGICO.....	11
1.1. Flor María	11
1.2. El problema del cruce.....	11
1.3. El novio.....	12
1.4. La cadena	13
1.5. La caja de joyas.....	15
1.6. Las motos	16
1.7. La mujer de Héctor	18
1.8. La cena.....	20
1.9. Los ángeles y los diablos.....	23
1.10. Predilecciones por diarios.....	24
1.11. Los amigos y sus aficiones.....	26
1.12. Amigos de la guerra.....	28
1.13. Decompras.....	31
2. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO.....	34
2.1. Las preguntas.....	34
2.2. El número que pensó.....	34
2.3. El caballo y el asno.....	35
2.4. Los obreros.....	36
2.5. El cordel.....	38
2.6. Los cromos.....	39
2.7. Los alumnos.....	41
2.8. División de un número.....	43
2.9. Las edades.....	44
2.10. La edad del tío.....	45
2.11. Tabla mágica de polinomios.....	46
3. RAZONAMIENTO NUMÉRICO.....	50
3.1. Problema de la medida.....	50
3.2. El gato trepador.....	52
3.3. El poblado.....	53
3.4. La edad.....	54

3.5. Las vacas de Newton.....	55
3.6. Los huevos de gallina y pato.....	56
3.7. La tabla mágica.....	60
3.8. Diversas tablas mágicas.....	63
3.9. La matriz mágica.....	65
3.10. Figuras de un solo trazo.....	68
 4. PROBLEMAS PROPUESTOS.....	 72
Razonamiento lógico.....	72
Razonamiento matemático.....	76
Razonamiento numérico.....	81
 SOLUCIONES A PROBLEMAS PROPUESTOS.....	 87
 BIBLIOGRAFÍA.....	 89

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1. Siete cadenas con cinco anillos cada una.....	13
Figura 1.2. Cinco anillos abiertos.....	14
Figura 1.3. Unión de seis trozos dos a dos usando tres de los anillos abiertos.....	14
Figura 1.4. Unión de seis trozos de cadena usando los cinco anillos abiertos.	14
Figura 1.5. Las cajas sin su color y los objetos que contienen.....	15
Figura 1.6. Las cajas con su color y objetos que contienen.....	16
Figura 1.7. La gráfica muestra al conductor que lleva la moto de... y lleva el caso de.....	18
Figura 1.8. Parejas de músicos y bailarines.....	19
Figura 1.9. Ubicación de las amigas alrededor de la mesa; fase 1.....	20
Figura 1.10. Ubicación de las amigas alrededor de la mesa; fase 2.....	21
Figura 1.11. Ubicación de las amigas alrededor de la mesa; fase 3.....	21
Figura 1.12. Ubicación de las amigas alrededor de la mesa y sus cualidades.....	22
Figura 2.1. Un caballo y un asno.....	36
Figura 3.1. Primera fase de llenado y vaciado.....	50
Figura 3.2. Segunda fase de llenado y vaciado.....	50
Figura 3.3. Tercera fase de llenado y vaciado.....	51

Figura 3.4. Cuarta fase de llenado y vaciado.....	51
Figura 3.5. Fase final de llenado y vaciado.....	52
Figura 3.6. Número de días para salir de un pozo de 10 m.....	53
Figura 3.7. Heptágono y sus diagonales de un solo trazo.....	69
Figura 3.8. Pentágono y sus diagonales de un solo trazo.....	69
Figura 3.9. Endecágono y sus diagonales de un solo trazo.....	69
Figura 3.10. Tridecágono y sus diagonales de un solo trazo.....	69
Figura 3.11. Ruta irregular de un solo trazo.....	69
Figura 3.12. Rectángulo cuadrículado de un solo trazo.....	69
Figura 3.13. Camino irregular de un solo trazo.....	70
Figura 3.14. Rectángulo cuadrículado de trazo.....	70
Figura 3.15. Figura geométrica de un solo trazo.....	70
Figura 3.16. Figura cilíndrica de un solo trazo.....	70
Figura 3.17. Figura geométrica de un solo trazo.....	70
Figura 3.18. Círculo seccionado de un solo trazo.....	70
Figura 3.19. Corazón con figuras geométricas de un solo trazo.....	71
Figura 3.20. Figura tridimensional de un de un solo trazo.....	71

PRÓLOGO

La Matemática lúdica, a través de los juegos recreativos de razonamiento lógico-matemático, pone a prueba nuestra capacidad de razonar, y aunque los problemas no se resuelven inmediatamente, es la constancia y darle vueltas y vueltas lo que permitirá encontrar la solución. Ningún problema es fácil, todos exigen concentración, dedicación y una gran capacidad razonativa.

El objetivo de este libro es contribuir con el desarrollo de la capacidad de razonamiento de los estudiantes de bachillerato y de aquellos que ingresan al curso de nivelación y primer semestre del nivel superior, para que potencien sus facultades de inteligencia; porque aquel que razona con eficacia es capaz de hallar los medios más seguros para resolver o desarrollar cualquier problema o actividad con eficiencia y efectividad.

Cuando uno busca el porqué y el cómo de las cosas, es cuando se ha aprendido a razonar, y es esta actividad la que nos ayuda a desarrollar nuestra inteligencia, nuestras destrezas, y en especial la seguridad, y la confianza en nuestro yo interior.

Estoy convencido de que todos aquellos que llegan a este nivel de razonar y de no aceptar las cosas sin una justificación o demostración, sin un por qué, son personas que, cada vez más, adquirirán confianza en sí mismos y dirán “yo sí puedo, esto y mucho más, y lo demostraré”. Es este momento el que quiero que tengan, porque a partir de este instante se automotivarán para aprender muchas cosas más sin importar cuán difíciles sean.

Jorge Tuapanta

DEDICATORIA

A mi ángel de la guarda “mi madre”
mis hermanos
y
mi padre

MATEMÁTICA LÚDICA

Introducción

Cada uno de los juegos recreativos, para desarrollar el razonamiento lógico-matemático, los propongo como una manera de apoyar a los docentes con una herramienta que ayude a motivar la clase de matemática, y muy especialmente para desarrollar el razonamiento lógico de los estudiantes.

Cabe señalar que cada juego recreativo constituye la recopilación de numerosas experiencias; los mismos han sido adaptados a nuestro medio y realidad; algunos de ellos son creaciones originales.

En la resolución de los juegos recreativos se presentan todos y cada uno de los pasos que implica el razonamiento; esto, ayudará al docente a crear otros de acuerdo con el medio en el que se desenvuelva.

Utilizar estos juegos en cada clase de matemática me ha traído muchas satisfacciones, porque la motivación que adquieren los estudiantes es contagiante, motiva al maestro a crear un juego nuevo, que sea un reto para el estudiante.

Cuando logran sacar un ejercicio que les parece complicado se motivan los estudiantes, y piden más...; pero, en ese momento, aprovecho para iniciar mi clase de matemática, diciéndoles que para la siguiente clase habrá otro juego que pondrá a prueba la capacidad, ingenio y creatividad de resolución.

Los juegos recreativos de razonamiento lógico-matemático han sido seleccionados para que sean resueltos en una forma práctica; y, lo más importante, que realmente les ayude a razonar; que exija un pensamiento lógico, y, ser imaginativos para resolver los juegos.

Me gustaría que este libro sea aprovechado por los docentes, y que utilicen la matemática recreativa para desarrollar ese razonamiento que tantas veces criticamos los profesores y decimos “estos estudiantes no saben razonar”.

Para terminar, dado que en este texto en ningún problema se sugiere el nivel en el que puede ser utilizado, su uso en las clases queda a discrecionalidad de los docentes, pues su experiencia y el conocimiento del potencial de sus estudiantes le permitirán escoger los que creyere conveniente según el nivel en que trabaje.

CAPÍTULO 1. RAZONAMIENTO LÓGICO

1.1. Flor María

Flor María vive en una casa de dos pisos. En el primer piso vive la gente que miente, en el segundo solo gente que dice la verdad. Dice Flor María que se encontró con un vecino que le dijo que vivía en el segundo piso. ¿En qué piso vive Flor María? (Tuapanta, 2014)

Solución

Analicemos las respuestas que darían los habitantes del primero y segundo piso, a la siguiente pregunta: ¿En qué piso vive Usted.?

Los del primer piso mienten siempre; por lo tanto, su respuesta sería: “Yo vivo en el segundo piso”.

Los del segundo piso dicen la verdad, por lo tanto, la contestación a la misma pregunta sería: “Yo vivo en el segundo piso”.

Examinemos lo que dijo Flor María: “Me encontré con un vecino que dice que vive en el segundo piso”.

Por los análisis anteriores, nos damos cuenta de que Flor María dice la verdad, entonces Flor María vive en el segundo piso.

1.2. El problema del cruce

Un hombre llega a la orilla de un río llevando un lobo, una cabra y una col. La barca para atravesar el río no puede llevar nada más que al pasajero y una de las piezas. ¿Cómo hacer la travesía para no perder ninguna de las cosas? (Tuapanta, 2014)

Solución

Analicemos la situación en la que se encuentra el hombre: como su barca no tiene la capacidad de carga esperada, debe decidirse por un único objeto y transportar lo primero. Si escoge como primer pasajero al lobo, al volver encontrará solo la cabra, pues esta se habrá dado un banquete con la col. Si decide llevar la col, al volver encontrará al lobo contento, y con su estómago lleno, pues este

habrá devorado a la cabra. Para que no surja ningún contratiempo el hombre deberá llevar primero a la cabra (pues el lobo no es vegetariano), y luego de transportarla, al otro lado del río, volverá y se decidirá por un nuevo pasajero.

¿Cómo decidirse por el nuevo pasajero? El hombre indistintamente escogerá cual quiera, col o lobo, pero debe regresar a la cabra a la orilla de salida, evitando así la pérdida de uno de los objetos.

Escojamos la col: el hombre la transportará hasta la otra orilla y regresará con la cabra, la desembarcará en la orilla inicial e inmediatamente subirá a la barca al lobo y lo llevará al otro lado del río. Lo dejará y regresará por la cabra, cumpliendo así el objetivo de pasar los tres objetos sin perder ninguno.

Si hubiese escogido al lobo como segundo objeto a transportar, dejaría al mismo en la otra orilla y trasladaría la cabra a la orilla inicial; dejaría la cabra y subiría a la col, la llevaría hasta la otra orilla y volvería por la cabra, completando el trabajo.

1.3. El novio

Para escoger un novio entre tres candidatos: un doctor en Matemáticas, un doctor en Física, y un ingeniero. en Sistemas, una chica decide someterlos a una prueba: sobre la cabeza de cada uno de ustedes se colocará una bola, cuyo color no podrán ver, pero si verán el color de la bola colocada sobre la cabeza de los demás.

Los colores se escogerán entre cinco bolas, tres rojas y dos verdes; el primero que diga el color de la bola que tiene sobre su cabeza será mi novio; al que se equivoque, le corto la cabeza.

Uno de ellos, el matemático, que ve una bola roja sobre la cabeza de los otros dos, afirma con seguridad, viendo que los otros dos no dicen nada, yo tengo una bola roja (Adaptación del problema “Los tres novios de Dahize”) (Malba Tahan, sf., p.198).

Solución

Cada uno de los participantes debe tener la absoluta seguridad del color de la esfera que tiene sobre su cabeza, ya que si responden teniendo dudas corren el riesgo de sufrir un cruel destino. El matemático, antes de contestar, debe tener absoluta certeza sobre lo que va a responder. A continuación, analizamos la situación:

Supongamos que el matemático tiene una bola verde sobre su cabeza; el físico pensaría: "Si yo tengo una bola verde sobre mi cabeza, el ingeniero en sistemas se daría cuenta de que la bola que tiene sobre su cabeza es roja, pues las dos únicas esferas verdes, estarían fuera de la bolsa y en las cabezas mía y del matemático. Como él no dice nada, entonces, la bola sobre mi cabeza no es verde, debe ser roja". Con este razonamiento, el doctor en Física sería sin lugar a duda el novio de la chica, pues no se habrá equivocado, suponiendo que el matemático tiene una bola verde sobre su cabeza.

De la misma manera, si el ingeniero en sistemas ve una bola verde sobre la cabeza del matemático, aplicaría un razonamiento exactamente igual al del físico, con lo que sin temor a equivocarse, afirmaría que la bola sobre su cabeza es roja, es decir, él pensaría: Si yo tengo una bola verde sobre mi cabeza, el doctor en física se daría cuenta que la bola que tiene sobre su cabeza es roja, pues las dos únicas esferas verdes, estarían fuera de la bolsa y en las cabezas mía y del matemático, como él no dice nada, entonces, la bola sobre mi cabeza no es verde, la misma debe ser roja, entonces, si el matemático tuviera una bola verde sobre su cabeza el doctor en Física o el ingeniero en Sistemas se darían cuenta y, sin temor a equivocarse, hubiesen dicho que la esfera que reposa sobre su cabeza es roja; pero ninguna de las dos personas responde. Por lo tanto, la esfera sobre la cabeza del matemático evidentemente no era verde, sino roja.

El doctor en Matemática debe haber hecho este razonamiento para indicar que la esfera que tenía sobre su cabeza era roja.

1.4. La cadena

A un herrero le entregaron siete trozos de cadena de cinco eslabones cada trozo y le encargaron que los uniera formando una cadena continua (ver figura 1.1.)

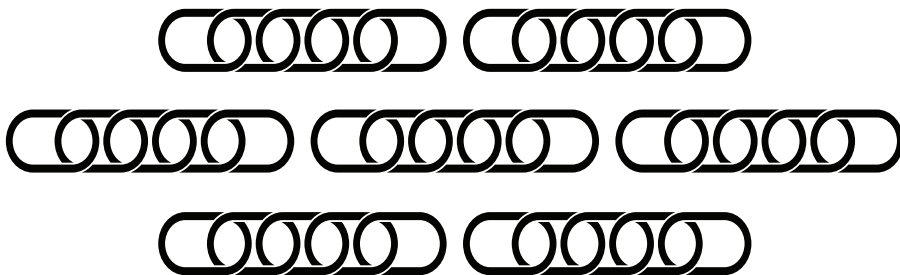


Figura 1.1. Siete cadenas con cinco anillos cada una

Antes de trabajar, el herrero meditó sobre el número de anillos que tendría necesidad de cortar y forjar. Decidió que haría falta abrir y cerrar seis anillos.

¿Es posible hacer el trabajo abriendo y enlazando un número menor de anillos? (Perelmann, 1968, p. 91).

Solución

La respuesta a la pregunta es sí. Para ello, de los siete trozos, cogemos cualquiera y abrimos los cinco anillos, como lo muestra la figura 1.2.

Ahora unimos los trozos dos a dos utilizando los anillos abiertos (ver figura 1.3.)



Figura 1.2. Cinco anillos abiertos

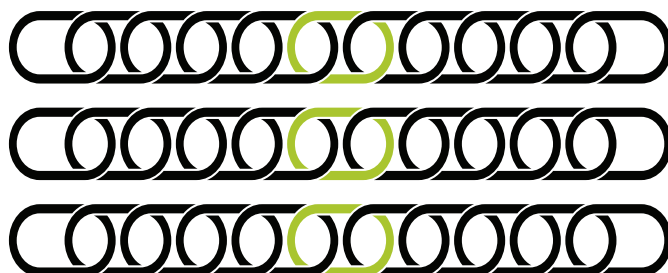


Figura 1.3. Unión de seis trozos dos a dos usando tres de los anillos abiertos

Hasta aquí se han utilizado tres anillos para unir los seis trozos de cadena, pero aún no tenemos una cadena continua.

Ahora disponemos de tres trozos de cadena con 11 eslabones cada una y dos anillos abiertos, los mismos que nos servirán para unir los tres trozos antes mencionados, y de esta manera obtener una cadena continua, cumpliendo con el objetivo, como se muestra en la figura 1.4.

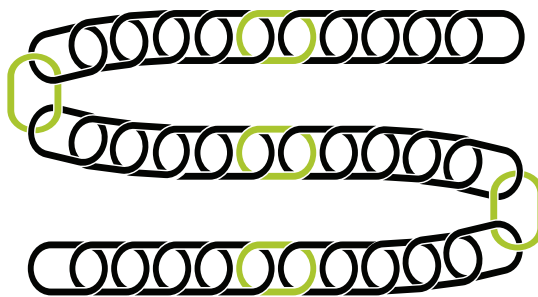


Figura 1.4. Unión de seis trozos de cadena usando los cinco anillos abiertos

1.5. La caja de joyas

El mayordomo de la señorita Diana decide robar las joyas de su patrona. Estas están guardadas en cuatro cajas de colores diferentes: negra, roja, blanca y verde. El mayordomo recuerda que cada caja contiene dos objetos diferentes. Una caja guarda un reloj y un brazalete, otra un anillo y un collar. La caja que esta a la izquierda de la blanca contiene un collar y un brazalete y la caja blanca contiene un reloj y un anillo. La caja verde está situada entre la roja y la blanca, la caja roja está a la izquierda de la verde, y la caja negra a la izquierda de la roja. Las dos cajas centrales contienen un collar, y la primera y última contienen un reloj.

Al momento del robo, por miedo a ser sorprendido, el mayordomo solo coge la caja negra y escapa. ¿Qué joyas robó? (Tuapanta, 2014).

Solución

El objetivo principal es ubicar las cajas según el contenido y su color, cumpliendo las condiciones del problema.

Según el problema, en cada caja existen dos objetos diferentes, una caja guarda un reloj y un brazalete; otra contiene un anillo y un collar, una tercera, un collar y un brazalete y, en la caja blanca, hay un reloj y un anillo, con lo cual se conoce lo que contiene cada caja, faltándonos determinar el color de las tres primeras cajas. En la figura 1.5, se muestran las cajas sin el color, pero con el contenido de cada una de ellas.

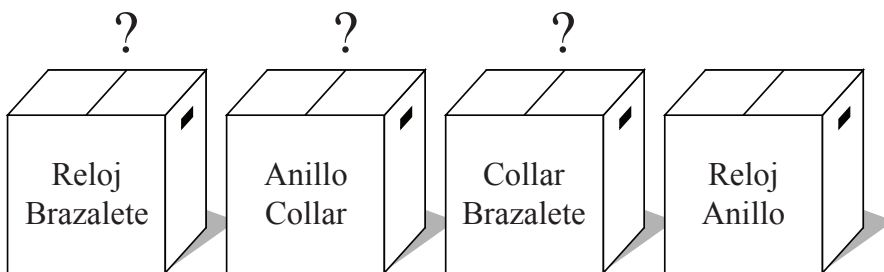


Figura 1.5. Las cajas sin su color y los objetos que contienen.

Como la caja verde está situada entre la roja y la blanca, la caja roja está a la izquierda de la verde y la negra la izquierda de la roja. Estas quedan ubicadas en

el siguiente orden: negra, roja, verde y blanca, con lo cual podemos determinar lo que contiene cada caja.

Según el problema, las dos cajas centrales contienen un collar, es decir, las cajas roja y verde poseen un collar; y la primera y última contienen un reloj, lo que significa que la caja blanca y la caja negra contienen un reloj; debemos recordar que la caja blanca contiene un reloj y un anillo, además, que una de las cajas contiene un reloj y un brazalete, entonces la caja negra contiene un reloj y un brazalete, siendo estos los objetos que el mayordomo robó.

Finalmente, se sabe que la caja que está a la izquierda de la blanca contiene un collar y un brazalete, siendo esta la verde, entonces, la caja que contiene un anillo y collar es la roja, ver figura 1.6.

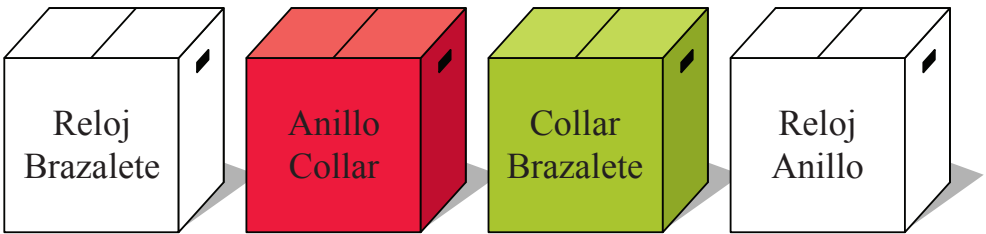


Figura 1.6. Las cajas con su color y objetos que contienen

1.6. Las motos

Valeria, Mariela, y Carmita se pasean en moto. Cada una está en la moto de una de sus amigas y tiene puesto el casco de la otra. La que lleva el casco de Carmita conduce la moto de Mariela. ¿Quién está en la moto de Valeria? (Tuapanta, 2014).

Solución

Para resolver el problema, tomaremos en cuenta las condiciones iniciales del mismo: que cada amiga lleve la moto de la una y tenga puesto el casco de la otra, es decir, en ningún momento ellas tendrán puesto su propio casco ni manejarán su propia moto. Entonces, bajo las condiciones del problema, una primera posibilidad la detallamos en la tabla 1.1, y una segunda, en la tabla 1.2:

Conductor	Casco de	Moto de
Valeria	Mariela	Carmita
Mariela	Carmita	Valeria
Carmita	Valeria	Mariela

Tabla 1.1. Primera posibilidad

Según la tabla 1.1, Valeria puede llevar puesto el casco de Mariela y conducir la moto de Carmita. Mariela puede llevar puesto el casco de Carmita y conducir la moto de Valeria. Y Carmita puede llevar puesto el casco de Valeria y conducir la moto de Mariela.

Conductor	Casco de	Moto de
Valeria	Carmita	Mariela
Mariela	Valeria	Carmita
Carmita	Mariela	Valeria

Tabla 1.2. Segunda posibilidad

Según la tabla 1.2, Valeria puede llevar puesto el casco de Carmita y conducir la moto de Mariela. Mariela puede llevar puesto el casco de Valeria y conducir la moto de Carmita. Y Carmita puede llevar puesto el casco de Mariela y conducir la moto de Valeria. Ahora establezcamos quién está en la moto de Valeria, sabiendo que la que lleva el casco de Carmita conduce la moto de Mariela. Según esta última condición, la solución que satisface los requerimientos del problema está resumido en la tabla 1.2. Por lo tanto, la que está en la moto de Valeria es Carmita (ver figura 1.7.)

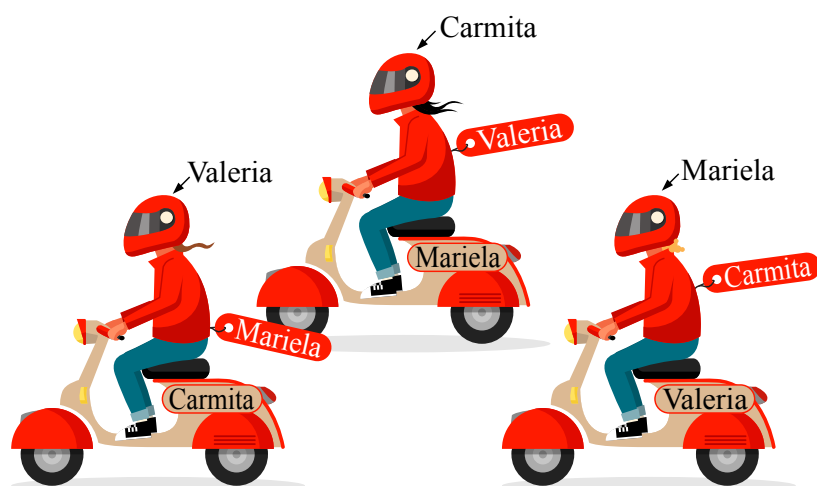


Figura 1.7. La gráfica muestra al conductor que lleva la moto de...
y lleva el caso de...

1.7. La mujer de Héctor

Cuatro parejas están de fiesta, sus nombres son: Alicia, Bárbara, Cecilia, Dora, Eduardo, Francisco, Gastón y Héctor. En cierto momento, Francisco se pone a tocar la trompeta acompañado por Cecilia al piano. Dora, que no es la mujer del trompetista, no quiere bailar, Héctor se queda sentado para acompañarla. Entonces, los dos se dan cuenta que la mujer de Eduardo no baila con su marido sino con el de Alicia. ¿Quién es la mujer de Héctor? (Tuapanta, 2014).

Solución

El objetivo del problema es determinar cuáles son las cuatro parejas de esposos. Primero, separemos a los músicos Francisco (trompetista) y Cecilia (pianista). Segundo, a las personas que bailan. Y tercero, a las personas que quedan sentadas, que serían Dora y Héctor (ver figura 1.8.)

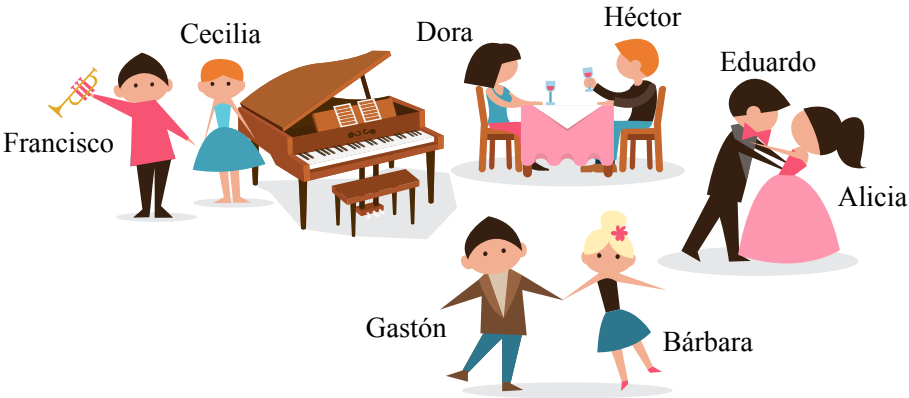


Figura 1.8. Parejas de músicos y bailarines

Según el problema, Dora y Héctor se dan cuenta de que en el grupo de los que bailan, la mujer de Eduardo baila con el marido de Alicia. Entonces, el marido de Alicia tiene que ser Gastón, pues los únicos varones que bailan son Eduardo y Gastón. Por lo tanto, la mujer de Eduardo tiene que ser Bárbara, pues es la única bailarina que no hemos tomado en cuenta. Dado que Dora no es la mujer del trompetista Francisco, se deduce que la mujer de Francisco sería Cecilia, pues es la única chica que se queda sin pareja. Entonces, Dora tiene que ser la mujer de Héctor. Las cuatro parejas de esposos las resumimos en la tabla 1.3:

ESPOSOS	CONDICIÓN
Dora y Héctor	Sentados
Gastón y Alicia	Bailando
Francisco y Cecilia	Músicos
Eduardo y Bárbara	Bailando

Tabla 1.3. El cuadro muestra las parejas de esposos y su condición

1.8. La cena

Una chica invitó recientemente a cenar a cinco de sus mejores amigas, ellas son: Nancy, Sandra, Jessica, Gloria, Paulina y Liliana (la anfitriona), las cuales se sentaron alrededor de una mesa circular. Una de ellas es inteligente, otra de ojos verdes, otra sentimental, otra escritora, otra cantante, y otra la mejor amiga de Jessica. La señorita que es la mejor amiga de Jessica se sentó frente a Nancy.

La que es inteligente se sentó frente a Gloria, quien a su vez se sentó entre la señorita de ojos verdes y la mejor amiga de Jessica.

La señorita que es escritora se sentó frente a Sandra, junto a la señorita inteligente y a la izquierda de la mejor amiga de Jessica.

La señorita de ojos verdes se sentó entre la señorita Gloria y la señorita que se sentó enfrente de la mejor amiga de Jessica.

Liliana, que es inteligente, se sentó junto a la señorita que es escritora y frente a la señorita que es sentimental.

¿Puede Usted. identificar a cada una de estas encantadoras chicas? (Tuapanta, 2014).

Solución

Para solucionar el problema, procedamos de la siguiente manera: coloquemos a Nancy en una de las sillas y al frente de ella ubicamos a la mejor amiga de Jessica, (ver figura 1.9.)

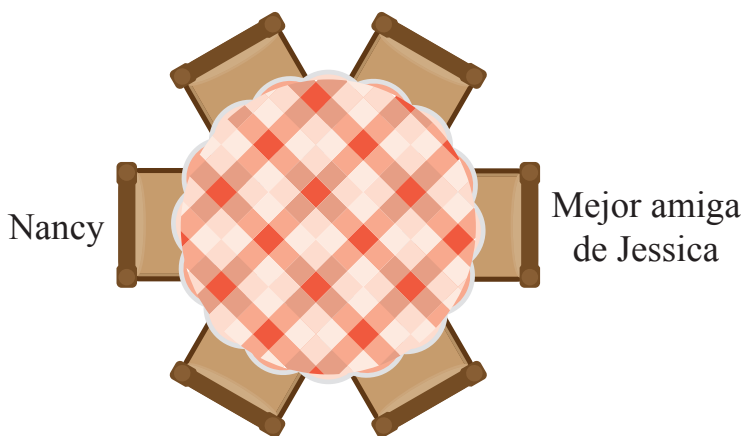


Figura 1.9. Ubicación de las amigas alrededor de la mesa; fase 1.

Ordenemos los demás datos. La escritora se sentó a la izquierda de la mejor amiga de Jessica (entendiéndose por izquierda, cuando nos movemos en sentido horario). Frente a la posición de la escritora, pondremos a Sandra y, a la izquierda de la escritora, colocamos a la señorita que es inteligente (ver figura 1.10.)

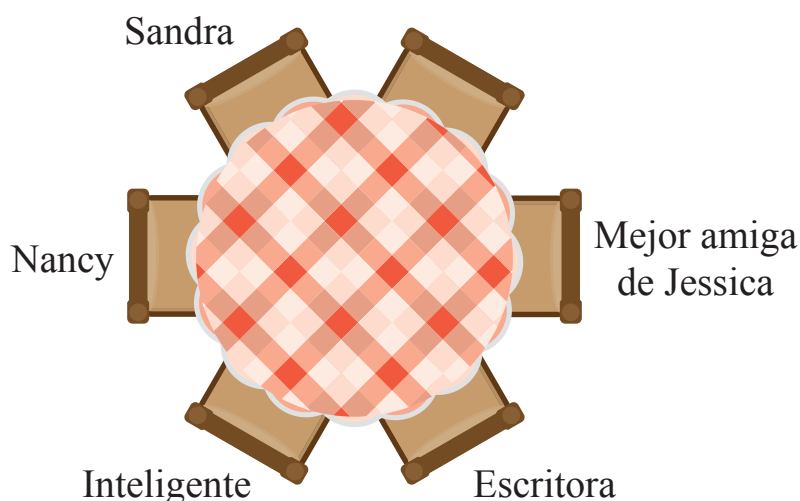


Figura 1.10. Ubicación de las amigas alrededor de la mesa; fase 2.

Interpretemos los demás datos. La que es inteligente se sentó frente a Gloria; esta, a su vez, se sentó entre la señorita de ojos verdes y la mejor amiga de Jessica. Sandra entonces será la señorita de ojos verdes, ver figura 1.11.

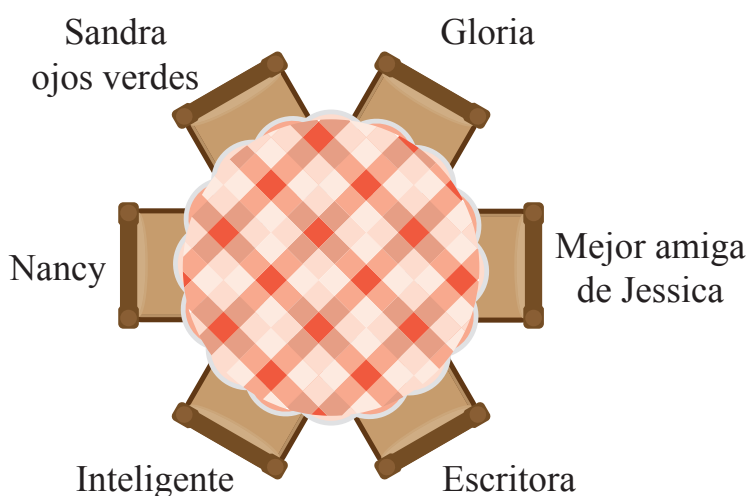


Figura 1.11. Ubicación de las amigas alrededor de la mesa; fase 3.

MATEMÁTICA LÚDICA

Sandra, la señorita de ojos verdes, se sentó entre Gloria y Nancy. Liliana, que es la inteligente, se sentó junto a la escritora.

La señorita que es sentimental se sentó frente a Liliana entonces, Gloria es la sentimental.

La mejor amiga de Jessica es Paulina y Jessica es la escritora. Por lo tanto, Nancy es la cantante.

La solución completa al problema sería la que se presenta en la figura 1.12.

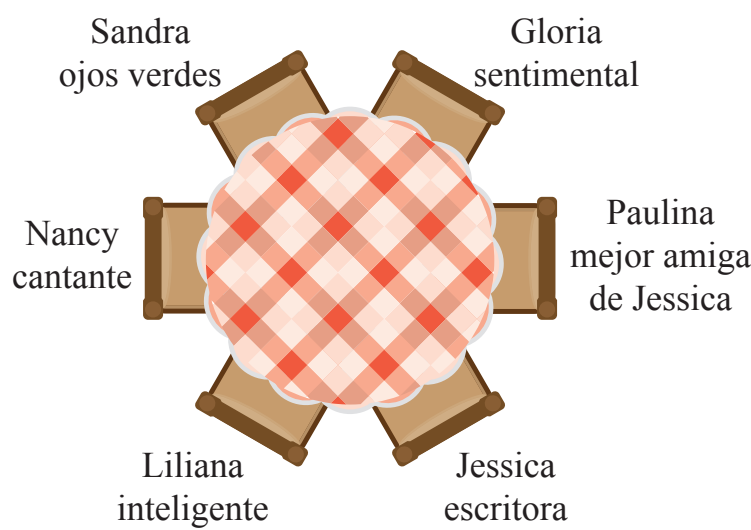


Figura 1.12. Ubicación de las amigas alrededor de la mesa y sus cualidades.

Interpretando la figura 1.12, tenemos los resultados que se expresan en la tabla 1.4.

Nombre	Sandra	Gloria	Paulina	Nancy	Liliana	Jessica
Cualidad	Ojos verdes	Sentimen- tal	Mejor amiga de Jessica	Cantante	Inteligente	Escritora

Tabla 1.4. El cuadro describe a las chicas y sus respectivas cualidades.

1.9. Los ángeles y los diablos

¡Alerta en el Paraíso! Los diablos lograron forzar la puerta guardada por el buen anciano San Pedro y se introducen disfrazados de ángeles para sembrar el desorden. Cinco sospechosos acaban de ser apresados. Pero no se sabe quién es el diablo y quién es el ángel. Comienza el interrogatorio. Lógicamente, los ángeles dicen siempre la verdad, mientras los diablos mienten siempre.

I. Jorge dice que Hugo es un diablo.

II. Hugo jura que Luis es un ángel.

III. Luis sostiene que Danilo es un diablo.

IV. Danilo afirma que Carlos es un ángel.

V. Para Carlos, Danilo y Jorge son ángeles.

¿Quiénes son los diablos y quiénes son los ángeles?

(Tuapanta, 2014)

Solución

Partamos de la afirmación II: Hugo jura que Luis es un ángel. Si Hugo fuese un ángel, no tendría necesidad alguna de jurar; entonces Hugo es un diablo, y lógicamente lo que él afirma es mentira, concluyendo que Luis es un diablo. De la declaración I y la deducción anterior, concluimos que Jorge dice la verdad, por lo tanto, él es un ángel. De la afirmación III y sabiendo que Luis es un diablo, se concluye que Danilo es un ángel. A partir del resultado anterior y la declaración IV concluimos que Carlos es un ángel.

Finalmente, por la declaración V y los resultados obtenidos confirmamos que Carlos es un ángel.

Entonces ponemos un $\checkmark$ en las casillas correspondientes del cuadro de doble entrada, como se muestra en la tabla 1.5:

	Cualidad				
	Jorge	Hugo	Luis	Danilo	Carlos
Ángel	√			√	√
Diablo		√	√		

Tabla 1.5. El cuadro muestra quiénes son los ángeles y diablos.

En conclusión, los ángeles son Jorge, Danilo y Carlos; y los diablos, Hugo y Luis.

1.10. Predilecciones por diarios

Amelia, Blanca, Carlos y Darwin tienen preferencia solo por uno de estos diarios: *El Universo*, *El Comercio*, *El Expreso* y *El Telégrafo*. Se sabe que:

- I. Amelia lee *Expreso*.
 - II. Blanca es vecina de quien le *El Universo*.
 - III. Carlos y Blanca no se conocen.
 - IV. Blanca no lee el diario *El Comercio*.
- ¿Quién lee el diario *El Comercio* y Qué lee Darwin?
(Santillana, 2012, p. 16)

Para resolver este tipo de problemas, se organizarán los datos en una tabla de doble entrada; cada casilla se marcará con un √ si la afirmación es verdadera y con una X si es falsa.

En cada fila o columna debe ir solo una casilla con un √, en las demás casillas de esa fila o columna se pondrá una X. Para la resolución del problema, relacionemos los nombres con los diarios que leen en una tabla de doble entrada, como se muestra a continuación:

- Según la afirmación I, Amelia lee *Expreso*; entonces, marcamos con un $\sqrt{}$ la intersección de la fila de Amelia y la columna de *Expreso* y con una X en las demás casillas de esa fila y columna.
- Y por la afirmación IV, marcamos con una X la intersección de la fila de Blanca y la columna de *El Comercio*, como se muestra en la tabla 1.6:

	Cualidad			
	El Universo	El Comercio	Expreso	El Telégrafo
Amelia	X	X	$\sqrt{}$	X
Blanca			X	
Carlos			X	
Darwin			X	

Tabla 1.6. El cuadro muestra la información de los datos directos.

- De la afirmación II y III, se deduce que Blanca es vecina de Darwin, por lo tanto, Darwin lee *El Universo*. Entonces ponemos un $\sqrt{}$ y una X donde corresponde, como se muestra en la tabla 1.7:

	Cualidad			
	El Universo	El Comercio	Expreso	El Telégrafo
Amelia	X	X	$\sqrt{}$	X
Blanca	X	X	X	
Carlos	X		X	
Darwin	$\sqrt{}$	X	X	X

Tabla 1.7. El cuadro muestra la información de la deducción.

- A partir de la información de la tabla 1.7, se deduce que Blanca lee *El Telégrafo* y Carlos lee *El Comercio*, entonces ponemos un $\checkmark$ y una X donde corresponde, como se muestra en la tabla 1.8:

	Cualidad			
	El Universo	El Comercio	Expreso	El Telégrafo
Amelia	X	X	$\checkmark$	X
Blanca	X	X	X	$\checkmark$
Carlos	X	$\checkmark$	X	X
Darwin	$\checkmark$	X	X	X

Tabla 1.8. El cuadro muestra la solución del problema.

Entonces, Carlos lee el diario *El Comercio*, y Darwin lee *El Telégrafo*.

1.11. Los amigos y sus aficiones

Armando, Martín y Eloy tienen diferentes aficiones: ciclismo, ajedrez y tenis, y gustan de vestimenta deportiva de colores diferentes: negro, azul y blanco. Se sabe que:

- I. Martín no practica tenis.
- II. Al ajedrecista no le gusta el azul.
- III. Armando no practica ajedrez.
- IV. Quien practica tenis gusta del color blanco.
- V. Martín no gusta del color negro.

¿Qué afición tiene Armando? ¿Qué color le gusta a Martín?

(Santillana, 2012, p. 17).

Solución

Relacionemos los nombres con el deporte y el color de vestimenta en un cuadro de doble entrada, como se muestra a continuación:

- Por las afirmaciones I, III y V marcamos con una X en la intersección, de la fila de Armando y la columna de ajedrez. Y con una X en las intersecciones de la fila de Martín y las columnas de tenis y negro, como se muestra en la tabla 1.9:

	Deportes			Color de vestimenta		
	Ciclismo	Ajedrez	Tenis	Negro	Azul	Blanco
Armando		X				
Martin			X	X		
Eloy						

Tabla 1.9. El cuadro muestra la información de los datos directos.

- A partir de la afirmación I, deducimos que a Martín no le gusta el color blanco (el tenis es considerado el deporte blanco) y tomando en consideración la afirmación V, concluimos que a Martín le gusta el color azul, entonces ponemos un √ y una X donde corresponde, como se muestra en la tabla 1.10:

	Deportes			Color de vestimenta		
	Ciclismo	Ajedrez	Tenis	Negro	Azul	Blanco
Armando		X			X	
Martin			X	X	√	X
Eloy					X	

Tabla 1.10. El cuadro muestra la información de la deducción.

- De la afirmación II y III deducimos que, como a Martín le gusta el color azul, él no es ajedrecista, entonces el que practica ajedrez es Eloy, por lo tanto, ponemos un $\sqrt$ y una X donde corresponde. A partir de las deducciones anteriores se llenan finalmente todas las casillas, tomando en cuenta que, si en la fila o columna de los cuadros relacionados con “deportes” y “color de vestimenta” aparecen dos “X” la tercera es “ $\sqrt$ ” y viceversa, como se muestra en la tabla 1.11:

	Deportes			Color de vestimenta		
	Ciclismo	Ajedrez	Tenis	Negro	Azul	Blanco
Armando	X	X	$\sqrt$	X	X	$\sqrt$
Martin	$\sqrt$	X	X	X	$\sqrt$	X
Eloy	X	$\sqrt$	X	$\sqrt$	X	X

Tabla 1.11. El cuadro muestra la solución completa del problema.

Por lo tanto, la afición de Armando es el tenis y el color que le gusta a Martín es el azul.

1.12. Amigos de la guerra

Cinco hombres que fueron camaradas en la Segunda Guerra Mundial asisten a una reunión. Se trata de Germán, Bolívar, Pablo, Hugo y Nelson cuyos oficios son: Grabador, Proyectista, Biólogo, Herrero y Neurólogo. Ellos viven en las ciudades de Green Field, Brownsville, Petersburg, Harper y Nashville, pero ninguno de ellos vive en la ciudad que tiene la misma inicial de su nombre, ni el nombre de su ocupación tiene la misma inicial que su nombre o que la del nombre de la ciudad en la cual vive. El biólogo no vive en Petersburg. Bolívar no es herrero ni proyectista; tampoco vive en Petersburg ni en Harper. Hugo vive en Nashville y no es biólogo ni grabador, Germán no es residente en Brownsville, como tampoco Nelson, quien no es biólogo ni herrero. Disponiendo solamente de la información dada, ¿puede Usted. determinar el nombre de la ciudad en la que reside Nelson? (Tuapanta, 2014).

Solución

Con la primera parte de los datos del problema, podemos formar una tabla de posibilidades, únicamente con las letras G, B, P, H y N; representando tanto a los nombres, como a las profesiones y las ciudades en que vive cada persona. De acuerdo con el enunciado, no se puede repetir una letra ni en la misma fila, ni en la misma columna, ver tabla 1.12.

	G (Germán)	B (Bolívar)	P (Pablo)	H (Hugo)	N (Nelson)
Profesión					
Ciudad					

Tabla 1.12. El cuadro muestra nombres, profesión y ciudad; fase 1.

Insertemos ahora, en tabla 1.12, las referencias de la segunda parte del problema.

Bolívar no es herrero ni proyectista, tampoco puede ser biólogo ni puede vivir en Brownsville, (la letra B coincide con la inicial de su nombre). Tampoco habita en Petesburgo ni Harper. De acuerdo con ello, en profesión y ciudad escribiremos las posibilidades restantes, es decir, las profesiones de grabador o neurólogo, y las ciudades de Green Field o Nashville, ver tabla 1.13.

	G	B	P	H	N
Profesión		G o N			
Ciudad		G o N			

Tabla 1.13. El cuadro muestra nombres, profesión y ciudad; fase 2.

Procedemos de igual manera con las demás condiciones planteadas por el problema. Hugo vive en Nashville y no es biólogo, grabador ni herrero (pues la letra H no debe coincidir con la inicial de su nombre); tampoco puede ser neurólogo (pues la letra N coincide con la ciudad). Esto deja en evidencia que la única posibilidad restante para la profesión de Hugo sea la de proyectista. Además, la letra N está repetida en la última fila, lo que elimina la posibilidad en duda sobre la ciudad en que vive Bolívar, y al mismo tiempo elimina G del casillero profesión, quedándonos los resultados como se muestra en tabla 1.14.

	G	B	P	H	N
Profesión		Neurólogo		Proyectista	
Ciudad		Green Field		Nashville	

Tabla 1.14. El cuadro muestra nombres, profesión y ciudad; fase 3.

Germán no es residente en Brownsville, tampoco puede vivir ni en Green Field, ni en Nashville, pues son ciudades en que residen Bolívar y Hugo respectivamente. Las posibilidades para la ciudad en que vive Germán son P o H (Petersburgo o Harper). Nelson no reside en Brownsville, tampoco puede vivir en Green Field ni Nashville, la posibilidad para la ciudad es la misma que tiene Germán. La ciudad faltante de ingresar al cuadro es Brownsville, la cual pondríamos debajo de Pablo. Nelson no es biólogo ni herrero, tampoco es neurólogo ni proyectista, debido a que son profesiones que ya escribimos en la tabla; la única posibilidad restante es que sea grabador (ver tabla 1.15)

	G	B	P	H	N
Profesión		Neurólogo		Proyectista	Grabador
Ciudad	P o H	Green Field		Nashville	P o H

Tabla 1.15. El cuadro muestra nombres, profesión y ciudad; fase 4.

El biólogo no vive en Petersburgo; analicemos esta afirmación: las únicas personas que podrían ser biólogos son Germán y Pablo; Pablo vive en Brownsville y no puede ser biólogo (por la letra B que se repetiría en la misma columna), dejando la posibilidad de serlo a Germán. Conociendo que Germán es biólogo, la profesión que nos faltaba ingresar es herrero, trabajo que le correspondería a Pablo, (ver tabla 1.16.)

	G	B	P	H	N
Profesión	Biólogo	Neurólogo	Herrero	Proyectista	Grabador
Ciudad	P o H	Green Field	Brownsville	Nashville	P o H

Tabla 1.16. El cuadro muestra nombres, profesión y ciudad; fase 5.

Puesto que el biólogo no vive en Petersburgo, eliminamos la P del casillero “ciudad” en que vive Germán; hemos comprobado entonces que Germán vive en Harper, por lo que quitaríamos la posibilidad de que Nelson viva en esta última ciudad. Por lo tanto, los nombres, profesión y ciudad de los amigos se muestra en la tabla 1.17.

	G	B	P	H	N
Profesión	Biólogo	Neurólogo	Herrero	Proyectista	Grabador
Ciudad	Harper	Green Field	Brownsville	Nashville	Petersburgo

Tabla 1.17. El cuadro muestra nombres, profesión y ciudad de todos los amigos.

En conclusión, la ciudad en la que vive Nelson es Petersburgo.

1.13. De compras

Las señoritas: Son Katty, Elena, María, Rocío, Paola y Mery. Las tres últimas chicas tienen las siguientes cualidades: impredecible, comprensiva y sentimental respectivamente. Las seis fueron juntas de compras al pasaje comercial “El Coral. Cada una de las señoritas fue directamente al piso en el cual se hallaba el artículo de regalo que quería comprar; cada una de ellas compró dos artículos. Compraron un esferográfico, un *stiker*, un cuadro, un osito de peluche, un payasito, un reloj, una esclava, un crucifijo, una agenda, un póster, un portarretratos y una lámpara.

Todas las señoritas, excepto Mery, entraron en el ascensor en el primer piso. También entraron en el ascensor dos caballeros. Dos señoritas, Rocío y la que compró la esclava y el crucifijo, descendieron en el segundo piso. En el tercer

piso se vendían pósters y *stikers*. Los caballeros descendieron en el cuarto piso. La señorita que compró el reloj y el esferográfico descendió en el quinto piso y dejó a María que descendiera sola en el sexto piso. En la fiesta de Navidad, Katty, que recibió un cuadro y un portarretratos como regalo sorpresa de una de las señoritas que había descendido en el segundo piso, presenció el agradecimiento que su enamorado hizo por el crucifijo que le dió una de las otras chicas. Si en el primer piso se vendían peluches y Elena fue la sexta persona que salió del ascensor. ¿Qué cosas compró cada una de las señoritas? (Tuapanta, 2014).

Solución

Para facilitar la solución, debemos ordenar, en una tabla adecuada, todos los objetos comprados, así como los nombres de las señoritas.

Según el problema, Mery se quedó en el primer piso, lugar donde se vendían peluches, por lo tanto, compró el osito. Rocío se quedó en el segundo piso, pero recordemos que, en la fiesta de Navidad, Katty recibió un cuadro y un portarretratos de quien se había quedado en el segundo piso, siendo esta persona Rocío. Se sabe que, en el primer piso, el ascensor se llenó con cinco chicas y dos caballeros. En el segundo piso, se bajan dos chicas. En el tercer piso, se baja una chica a comprar posters y stikers. En el cuarto piso, descenden los caballeros. Por lo tanto, Elena, siendo la sexta persona en salir del ascensor, se bajó en el quinto piso y compró un reloj y un esferográfico. María descendió sola en el sexto piso.

Dado que, Elena, María y Mery no descendieron en el segundo piso y Rocío no compró un crucifijo, entonces Paola compró la esclava y el crucifijo, y descendió en el segundo piso. Katty, al descender en el tercer piso, compró pósters y *stikers*, (ver tabla 1.18.)

	Katty	Elena	María	Rocío	Paola	Mery
Piso	3	5	6	2	2	1
Objetos	Póster Stiker	Reloj Esterográfico		Cuadro Portarretratos	Esclava Crucifijo	Osito

Tabla 1.18. El cuadro muestra nombres, piso de descenso y objetos que compraron; fase 1.

Consideremos ahora los objetos que sobran y que no están asignados a ninguna señorita: el payaso, la lámpara y la agenda. Dado que en el primer piso se vendían peluches, y Mery quedo ahí, ella debio haber comprado el payaso. Los objetos restantes lo debió haber comprado María en el sexto piso. En la tabla 1.19, se muestran los objetos que cada una compraron por cada chica, al igual que el piso en el que descendió.

	Katty	Elena	María	Rocío	Paola	Mery
Piso	3	5	6	2	2	1
Objetos	Póster Stiker	Reloj Esterográfico	Lámpara Agenda	Cuadro Portarretratos	Esclava Crucifijo	Osito Payasito

Tabla 1.19. El cuadro muestra los nombres, piso de descenso y los objetos que compraron

CAPÍTULO 2. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

2.1. Las preguntas

En un examen de 15 preguntas, se da cinco puntos por cada respuesta correcta y se quita tres puntos por cada respuesta errada. Si un estudiante responde a todas las preguntas y obtiene tres puntos. ¿Cuántas preguntas contestó correctamente? (Tuapanta, 2014).

Solución

Para resolver el problema, representemos con x , el número de preguntas con respuestas correctas; entonces, el número de preguntas con respuestas erradas sería: $15 - x$. Si se dan cinco puntos por cada respuesta correcta, entonces el total de puntos que gana el estudiante está representado por $5x$.

Si tres puntos se quitan por cada respuesta incorrecta, entonces el total de puntos que pierde el estudiante está representado por $3(15 - x)$.

Si el estudiante responde a todas las preguntas y obtiene tres puntos, significaría que: $5x - 3(15 - x) = 3 \Rightarrow 5x + 3x = 3 + 45 \Rightarrow x = 6$.

Entonces, él estudiante contesta correctamente seis preguntas y lógicamente nueve las contesta en forma errada.

Una comprobación simple sería: $5(6) - 3(9) = 3$ puntos, la nota que saco el estudiante.

2.2. EL Número que pensó

Dígale que el número pensado lo eleve al cubo. Sume el triple del cuadrado del número, luego sume el triple del número y por último sume 1.

Pídale el resultado de todas las operaciones antes indicadas.

Ahora saque la raíz cúbica de todo ese resultado y réstele uno. El resultado será el número que la persona pensó al inicio (Tuapanta, 2014).

Solución

Comprobemos matemáticamente que siempre llegamos al número pensado, siempre y cuando se hagan todos los pasos y cálculos en forma correcta.

Supongamos que el número pensado es: x .

Eleve al cubo: $3x$.

Al valor anterior, súmele el triple del cuadrado del número: $x^3 + 3x^2$.

Al valor obtenido anteriormente, súmele el triple del número: $x^3 + 3x^2 + 3x$

Por último, a la cantidad anterior, súmele 1: $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$

Ahora, saque la raíz cúbica de ese resultado: $x + 1$.

Al valor obtenido, réstele 1, y nos queda el número pensado: x .

Por ejemplo, supongamos que el número que esta pensando es el 5.

Elevemos al cubo, y nos da: 125.

Al resultado anterior, sumemos el triple del cuadrado del número: $125 + 3(5)^2 = 200$.

A la cantidad obtenida, sumemos el triple del número: $200 + 3(5) = 215$.

Finalmente, al resultado anterior, sumemos 1: $215 + 1 = 216$. Esta cantidad de 216 nos da la persona a la que intentamos adivinar el número que está pensando.

Sacamos la raíz cúbica de 216, que es 6 y le restamos 1, obteniéndose el número que estaba pensando, el 5.

2.3. El caballo y el asno

Un caballo y un asno caminaban juntos llevando su pesada carga sobre sus lomos. Mientras el asno se quejaba de su pesada carga, el caballo le dijo: "¡No te lamentes!, ya que, si yo te quitase dos sacos, entonces mi carga sería el triple que la tuya. Sin embargo, si yo te diera tres sacos entonces tu carga sería el doble que la mía". ¿Cuántos sacos llevaba cada uno? (Adaptación del problema el caballo y asno) (Perelman, 1978, p. 36).

Solución



Figura 2.1. Un caballo y un asno

Para resolver el problema, designemos con x el número de sacos que lleva el caballo, y con y el número de sacos que lleva el asno. Según el problema, a la queja del asno, el caballo le dice, si yo te quitase dos sacos, entonces mi carga sería el triple que la tuya, es decir $x + 2 = 3(y - 2)$.

Sin embargo, si yo te diera tres sacos entonces tu carga sería el doble que la mía, es decir: $2(x - 3) = y + 3$.

Al despejar x de las dos expresiones halladas e igualar sus resultados tenemos: $3(y - 2) - 2 = \frac{y + 3}{2} + 3 \Rightarrow y = 5$

Con el valor de y hallamos $x = 7$

Entonces, el caballo cargaba siete sacos, mientras que el asno se lamentaba por tener cinco sacos en su lomo.

2.4. Los obreros

Los obreros de una fábrica se declaran en huelga. La cuarta parte de ellos cobra un jornal de \$ 120 diarios, la tercera parte de \$ 100 diarios y el resto de \$ 80. La huelga duró 15 días y, al reintegrarse al trabajo, se les abonó la cuarta parte de lo que hubieran ganado en los 15 días, por lo que los obreros perdieron \$ 548 100. ¿Cuántos son los obreros? (Tuapanta, 2014)

Solución

Determinemos el número de obreros que existen en la fábrica, a partir del salario que percibe los obreros de cada uno de los grupos.

Calculemos el salario que recibirían los obreros en 15 días de labores normales.

Supongamos que y representa el salario total que recibirían los trabajadores en los 15 días de trabajo normal. Como ellos solo reciben la cuarta parte de su salario normal y pierden \$ 548 100 que representa los $\frac{3}{4}$ del salario total que debía pagarse a todos los trabajadores, se tiene que:

$$\frac{3}{4} y = 548\,100 \Rightarrow y = 730\,800$$

Entonces, en los 15 días de trabajo, la totalidad de los obreros debía recibir un monto de \$ 730 800 o \$ 48 720 diarios.

Determinemos cuánto cobra cada grupo de obreros, para ello representemos con x , el número total de obreros que hay en la fábrica, entonces:

El primer grupo, que constituye la cuarta parte de los obreros, cobraría en un día de trabajo: $120 \left(\frac{x}{4} \right) = 30x$.

El segundo grupo, que constituye la tercera parte de los obreros, cobraría en un día de trabajo: $120 \left(\frac{x}{3} \right) = \frac{100x}{3}$.

Y el tercer grupo, que constituye las $\frac{5}{12}$ partes de los obreros, cobraría en un día de trabajo: $120 \left(\frac{5x}{12} \right) = \frac{100x}{3}$.

Sumando los salarios diarios de los tres grupos de trabajadores, obtendríamos el salario diario de todos los obreros de la fábrica, es decir:

$$30x + \frac{100x}{3} + \frac{100x}{3} = 487\,020$$

Al resolver la ecuación, determinamos el número de trabajadores que existen en la fábrica; esto es 504 obreros.

Comprobemos el resultado:

El primer grupo lo constituye la cuarta parte de los 504 obreros, esto es 126. Si cada obrero recibe \$ 120 diarios, la fábrica paga \$ 226 800 por los 15 días de trabajo de este grupo.

El segundo grupo lo constituye la tercera parte de los 504 obreros, esto es 168. Si cada obrero recibe \$ 100 diarios, la fábrica paga \$ 252 000 por los 15 días de trabajo de este grupo.

Y el tercer grupo de obreros, que son $504 - 126 - 168 = 210$, gana \$ 80 diarios, por lo que la fábrica paga \$ 252 000 a este grupo.

En resumen, la fábrica por concepto de sueldos, en los 15 días de trabajo de sus obreros, paga: $226\,800 + 252\,000 + 252\,000 + 730\,800$

Como los obreros se plegaron a 15 días de huelga, ellos recibieron solo la cuarta parte de \$ 730 800, esto \$ 182 700, y perdieron \$ 548 000 que constituye las tres cuartas partes del monto total.

2.5. El cordel

La mamá le dice al hijo. ¿Para qué necesitas tanto cordel si ya te di un buen ovillo? ¿Qué has hecho con el cordel? Y el muchacho contesta. Primero me cogiste un tercio. La mitad de lo que quedó se la llevó Juan. Quedó muy poquito y de ello cogió papá la tercera parte. Luego Katty necesitó las tres cuartas partes del resto. ¡No quedaron más que 20 centímetros! ¿Qué longitud tenía el cordel al principio? (Adaptación del problema “El bramante”) (Perelmann, 1968, p.27).

Solución

Para resolver el problema, supongamos que x representa la longitud total del cordel. Según el problema, la mamá del muchacho cogió la tercera parte, es decir:

$\frac{x}{3}$ y sobró $\frac{2x}{3}$ de cordel

la mitad de $\frac{2x}{3}$ se lo llevó Juan, es decir $\frac{1}{2} \left(\frac{2x}{3} \right) = \frac{x}{3}$ y

quedó $\frac{x}{3}$ de cordel.

El papá del muchacho cogió un tercio de $\frac{x}{3}$, es decir: $\frac{1}{3} \left(\frac{x}{3} \right) = \frac{x}{9}$ y queda

$\frac{2x}{9}$ de cordel.

Y por último Katty cogió las tres cuartas partes de $\frac{2x}{9}$, es decir $\frac{3}{4} \left(\frac{2x}{9} \right) = \frac{x}{6}$,

quedándole al muchacho $\frac{1}{4} \left(\frac{2x}{9} \right) = \frac{x}{18}$ del cordel.

Como al final de la repartición, el muchacho se queda con 20 centímetros, entonces: $\frac{x}{18} = 20 \Rightarrow x = 360$.

Entonces, la longitud de cordel que tenía el muchacho al principio era de 360 centímetros.

Comprobemos nuestro resultado:

La mamá del muchacho cogió un tercio de de 360 cm, es decir: $\frac{1}{3} (360 \text{ cm}) = 120 \text{ cm}$ y quedaron 240 cm.

La mitad de 240 cm se lo llevó Juan, esto es: $\frac{1}{2} (240 \text{ cm}) = 120 \text{ cm}$ y quedaron 120 cm.

El papá cogió la tercera parte de 120 cm, es decir: $\frac{1}{3} (120 \text{ cm}) = 40 \text{ cm}$ y quedaron 80 cm.

Por último, Katty necesitaba las tres cuartas partes de 80 cm, esto es: $\frac{3}{4} (80 \text{ cm}) = 60 \text{ cm}$ y quedaron los 20 cm que indicó el muchacho.

2.6. Los cromos

Jorge sale de la casa con un montón de cromos y vuelve sin ninguno. Su madre le pregunta que ha hecho con ellos y el niño contesta: a cada amigo que me encontré le di la mitad de los cromos que tenía más dos. ¿Y a cuántos amigos te has encontrado? A siete. ¿Cuántos cromos tenía Juanito al salir de casa? (Tuapanta, 2014).

Solución

Para resolver el problema, se puede utilizar un razonamiento matemático y un lógico.

Razonamiento matemático

Denotemos con n la cantidad de cromos que Jorge tenía al salir de casa.

Según el problema, la repartición de los cromos entre los siete amigos se lo hizo de la siguiente forma:

Cuando Jorge se encontró con su primer amigo, le entregó la mitad de los cromos más dos, quedándole la mitad menos dos, es decir: $\frac{n}{2} - 2 = \frac{n-4}{2}$.

Al encontrarse con su segundo amigo, le entregó la mitad de $\frac{n-4}{2}$ más dos, quedándole:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{n-4}{2} \right) - 2 = \frac{n-12}{4}.$$

Al tercer amigo, le entregó la mitad de $\frac{n-12}{4}$ más dos, quedándole:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{n-12}{4} \right) - 2 = \frac{n-28}{8}.$$

Al cuarto amigo, le regaló la mitad de $\frac{n-28}{8}$ más dos, quedándole:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{n-28}{8} \right) - 2 = \frac{n-60}{16}.$$

Al quinto amigo, le regaló la mitad de $\frac{n-60}{16}$ más dos, quedándole:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{n-60}{16} \right) - 2 = \frac{n-124}{32}.$$

Al sexto amigo, le regaló la mitad de $\frac{n-124}{32}$ más dos, quedándole:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{n-124}{32} \right) - 2 = \frac{n-252}{64}.$$

Y al séptimo amigo, le regaló la mitad de $\frac{n-252}{64}$ más dos, quedándole:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{n-252}{64} \right) + 2 = \frac{n-508}{128}.$$

Pero, según el enunciado del problema, Jorge regresa a casa sin ningún cromó, entonces, el resto representado por la última expresión deducida, la igualamos a cero, es decir: $\frac{n-508}{128} = 0$.

Así se obtiene una ecuación que da como resultado el valor de $n = 508$, que representa el número de cromos que Jorge tenía al salir de casa.

Razonamiento lógico

Para el razonamiento lógico, lo que hacemos es buscar el número de cromos que Jorge tenía cuando se encontró con el séptimo amigo.

Como sabemos, a cada amigo que encontraba le daba la mitad de los cromos que tenía más dos. Entonces, cuando se encontró al séptimo amigo, él debía tener cuatro cromos.

Al encontrarse con el sexto amigo, debía tener 12 cromos.

Al encontrarse con el quinto amigo, debía tener 28 cromos.

Al encontrarse con el cuarto amigo, debía tener 60 cromos.

Al encontrarse con el tercer amigo, debía tener 124 cromos.

Al encontrarse con el segundo amigo, debía tener 252 cromos.

Y al encontrarse con el primer amigo, Jorge debía tener 508 cromos.

2.7. Los alumnos

En un instante dado en el aula de una escuela, un grupo de alumnos está leyendo, otros charlando, y la cuarta parte del total de alumnos están escribiendo. Después, cuatro de ellos dejan la lectura por la escritura, uno deja la charla por la lectura y dos dejan la escritura por la charla, con lo cual resulta entonces que escriben tantos como leen y leen tantos como charlan. ¿Cuál es el número de alumnos? (Tuapanta, 2014).

Solución

Para la resolución del problema, supongamos que x representa el total de alumnos e y los alumnos que leen en un instante dado, entonces tendremos que:

Los alumnos que escriben son: $\frac{x}{4}$.

Los alumnos que charlan son: $x - \frac{x}{4} - y = \frac{3x}{4} - y$.

Según el problema, cuatro alumnos dejan la lectura por la escritura, pero uno deja la charla por la lectura, entonces los alumnos que leen son: $y - 4 + 1 = y - 3$

En otro instante, dos alumnos dejan la escritura por la charla y cuatro dejan la lectura por la escritura, entonces los alumnos que escriben son: $\frac{x}{4} - 2 + 4 = \frac{x}{4} + 2$

Además, un alumno deja la charla por la lectura y dos dejan la escritura por la charla, entonces los alumnos que charlan son: $\frac{3x}{4} - y - 1 + 2 = \frac{3x}{4} - y + 1$.

Finalmente, teniendo en cuenta que, escriben tantos como leen y leen tantos como charlan, se forma el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{x}{4} + 2 = y - 3 \\ y - 3 = \frac{3x}{4} \end{cases} \quad y + 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - 4y = -20 \\ 3x - 8y = -16 \end{cases}$$

Para la resolución del sistema, se puede aplicar cualquier técnica de resolución. Aquí utilizaremos la de reducción:

$$\begin{cases} x - 4y = -20 \\ 3x - 8y = -16 \end{cases} \quad \bullet(-3) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -3x + 12y = 60 \\ 3x - 8y = -16 \end{cases}$$

Al sumar las ecuaciones nos queda: $4y = 44 \Rightarrow y = 11$.

Y al sustituir el valor de y en la primera ecuación del sistema original, se obtiene: $x - 4(11) = -20 \Rightarrow x = 24$.

Entonces:

El número total de alumnos es: 24.

Los alumnos que leen: $y-3 = 11-3 = 8$

Los alumnos que escriben: $\frac{x}{4} + 2 = \frac{24}{4} + 2 = 8$.

Los alumnos que charlan: $\frac{3x}{4} - y + 1 = \frac{3(24)}{4} - 11 + 1 = 8$.

2.8. División de un número

Dividir un número en cuatro partes de forma que, si se suma, resta, multiplica o divide por un número dado, correspondientemente, resulta un número que es múltiplo de dicho número dado. Determinar el número buscado si el número dado es 25 y el número multiplicador es el séptimo elemento de la sucesión de Fibonacci (adaptación del problema ruletas chinas) (Parra, 2012, p.21).

Solución

Para hallar el número que se debe dividir, demostremos matemáticamente como obtener los números que cumplan con las condiciones pedidas por el problema: Sea x el número a dividir, a, b, c, d los números resultados de la división, m y k el número dado y el multiplicador respectivamente, entonces $x = a + b + c + d$. Según las condiciones del problema tenemos que:

$$\begin{cases} a + m = km \\ b - m = km \\ am = km \\ \frac{a}{m} = km \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = m(k-1) \\ b = m(k+1) \\ a = k \\ a = km^2 \end{cases}$$

como $x = a + b + c + d$

$$x = m(k-1) + m(k+1) + k + km^2$$

$$x = k(m^2 + 2m + 1)$$

$$x = k(m+1)^2$$

Aplicando a nuestro caso, para $m = 25$ y $k = 13$ tenemos: $x = 13 (25 + 1)^2 = 8788$.

Entonces el número a dividir es $x = 8788$ y los cuatro números resultados de la división son:

$$a = 25(13-1) = 300 \quad b = 25(13-1) = 350 \quad c = 13 \quad d = 13(25)^2 = 8125.$$

Nota: los números de la serie de Fibonacci son:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,...

2.9. Las edades

En una charla familiar, el padre le dice al hijo: Hace ocho años, mi edad era el triple de la edad que tu tenías, pero dentro de siete años será el doble; tu madre es cinco años menor que yo y tu hermano menor tiene un tercio de la edad de tu madre. ¿Cuántos años tienen los integrantes de la familia?

Solución

Para su solución nos apoyaremos en la tabla 2.1. Sea x la edad actual del padre y y edad actual del hermano mayor. A partir de estos resultados, se hallará la edad de los demás integrantes de la familia.

	Edad hace ocho años	Edad actual	Edad dentro de siete años
Padre	$x - 8$	x	$x + 7$
Hijo mayor	$y - 8$	y	$y + 7$

Tabla 2.1. Resumen de datos del problema

Según el problema, hace ocho años, la edad del padre era el triple de la edad de su hijo mayor, es decir: $x - 8 = 3 (y - 8)$ ①

Y dentro de siete años, la edad del padre será el doble de la edad de su hijo mayor, es decir: $x + 7 = 2 (y + 7)$ ②

Para hallar las soluciones de las ecuaciones ① y ②, utilizaremos la técnica de sustitución.

De la ecuación ① despejamos x , es decir:

$$x - 8 = 3(y - 8) \Rightarrow x = 3y - 16,$$

y sustituimos en ②, para obtener el valor de y , es decir:

$$x + 7 = 2(y + 7) \Rightarrow 3y - 16 + 7 = 2(y + 7) \Rightarrow y = 23,$$

el valor de y , lo sustituimos en la ecuación despejada de ①, es decir:

$$x = 3y - 16 \Rightarrow x = 3(23) - 16 \Rightarrow x = 53$$

Entonces la edad del padre es 53 años y del hijo mayor es 23 años. Para hallar la edad de la madre, sabemos que el padre es mayor con 5 años, es decir, la madre tiene 48 años y el hijo menor tiene un tercio de la edad de la madre, esto es,

$$\frac{1}{3}(48) = 16 \text{ años.}$$

2.10. La edad del tío

La sobrina le pregunta a su tío: "¿Cuántos años tienes, tío? ¿cuántos años tiene mi papa y mi tía?". Él le contesta, el cuadrado de tu edad excede en un año a la mía, y dentro de dos años, el séxtuple de tu edad excederá en cuatro. Tu padre es menor con dos años y tu tía es menor con cuatro años. ¿Cuántos años tienen el tío, la sobrina, su padre y su tía?

Solución

Para su solución nos apoyaremos en la tabla 2.2. Sea x la edad actual del tío y y edad actual de la sobrina. A partir de estos resultados, se hallará la edad del padre de la niña y de su tía.

	Edad actual	Edad dentro de dos años
Tío	x	$x + 2$
Sobrino	y	$y + 2$

Tabla 2.2. Resumen de datos del problema

Según el problema, el cuadrado de la edad actual de la sobrina excede en un año a la edad del tío, es decir: $y^2 = x + 1$. ①

Y dentro de dos años, el séxtuple de la edad de la sobrina excede en cuatro años a la edad del tío, es decir: $6(y + 2) = (x + 2) + 4$. ②

Para hallar las soluciones de las ecuaciones ① y ②, utilizaremos la técnica de sustitución. De la ecuación ② despejamos x , es decir:

$$6(y + 2) = (x + 2) + 4 \Rightarrow x = 6y + 6,$$

y sustituimos en ①, obteniendo el valor de y , es decir:

$$y^2 = x + 1 \Rightarrow y^2 = 6y + 6 + 1 \Rightarrow y^2 - 6y - 7 = 0,$$

$$y^2 - 6y - 7 = 0 \Rightarrow (y - 7)(y + 1) = 0 \Rightarrow y = 7 \text{ o } y = -1,$$

el valor de y negativo no puede ser solución, ya que hablamos de edades, entonces $y = 7$ sustituimos en $x = 6y + 6$, para hallar el valor de x , es decir:

$$x = 6y + 6 \Rightarrow x = 6(7) + 6 = 48.$$

Entonces la edad del tío es 48 años y la edad de sobrina es siete años. Para hallar la edad del padre de la niña, sabemos que el tío es mayor con dos años, es decir, la edad del padre es 46 años y la tía es menor con cuatro, entonces, tiene 44 ños.

2.11. Tabla mágica de polinomios

En la tabla 2.3, escoja una fila (o columna), seleccione un polinomio y píntelo o encierre en un círculo; repita la misma acción con las demás filas (o columnas),.

Al final en cada una de las filas y columnas debe quedar pintado o encerrado en un círculo un único polinomio. Sume los cuatro polinomios pintados o encerrados en un círculo, y compruebe que el polinomio resultante, factorizado es

$$(2x - 3)(3x - 7)(x - 5)$$

$4x^3 - 5x^2 + x - 5$	$6x^3$	$4x^3 - 3x^2 + 24x - 100$	$4x^3 - 20x^2 + x - 20$
$-17x^2 + 39x - 5$	$2x^3 - 12x^2 + 38x$	$-15x^2 + 62x - 100$	$-32x^2 + 39x - 20$
$-12x^2 + 42x + 10$	$2x^3 - 7x^2 + 41x + 15$	$-10x^2 + 65x - 85$	$-27x^2 + 42x - 5$
$-11x^2 + 32x$	$2x^3 - 6x^2 + 31x + 5$	$-9x^2 + 55x - 95$	$-26x^2 + 32x - 15$

Tabla 2.3. Tabla mágica de polinomios 4x4

Solución

A continuación, se muestran tablas con cuatro polinomios pintados luego de haber realizado las acciones solicitadas por el problema. Y se comprueba que la suma de esos polinomios una vez factorizado es $(x - 5)(2x - 3)(3x - 7)$.

$4x^3 - 5x^2 + x - 5$	$6x^3$	$4x^3 - 3x^2 + 24x - 100$	$4x^3 - 20x^2 + x - 20$
$-17x^2 + 39x - 5$	$2x^3 - 12x^2 + 38x$	$-15x^2 + 62x - 100$	$-32x^2 + 39x - 20$
$-12x^2 + 42x + 10$	$2x^3 - 7x^2 + 41x + 15$	$-10x^2 + 65x - 85$	$-27x^2 + 42x - 5$
$-11x^2 + 32x$	$2x^3 - 6x^2 + 31x + 5$	$-9x^2 + 55x - 95$	$-26x^2 + 32x - 15$

Tabla 2.4. Tabla mágica con cuatro polinomios pintados, posibilidad 1.

Al sumar los polinomios que aparecen pintados en la tabla 2.4, obtenemos:

$$\begin{array}{rrrr} 4x^3 & -5x^2 & x & -5 \\ 2x^3 & -7x^2 & +41x & +15 \\ & -15x^2 & +62x & -100 \\ & -26x^2 & +32x & -15 \\ \hline 6x^3 & -53x^2 & +136x & -105 \end{array}$$

Si al polinomio obtenido, aplicamos la regla de Ruffini para factorarlo se obtiene: $6x^3 - 53x^2 + 136x - 105 = (x - 5)(2x - 3)(3x - 7)$.

$4x^3 - 5x^2 + x - 5$	$6x^3$	$4x^3 - 3x^2 + 24x - 100$	$4x^3 - 20x^2 + x - 20$
$-17x^2 + 39x - 5$	$2x^3 - 12x^2 + 38x$	$-15x^2 + 62x - 100$	$-32x^2 + 39x - 20$
$-12x^2 + 42x + 10$	$2x^3 - 7x^2 + 41x + 15$	$-10x^2 + 65x - 85$	$-27x^2 + 42x - 5$
$-11x^2 + 32x$	$2x^3 - 6x^2 + 31x + 5$	$-9x^2 + 55x - 95$	$-26x^2 + 32x - 15$

Tabla 2.5. Tabla mágica con cuatro polinomios pintados, posibilidad 2.

Al sumar los cuatro polinomios que aparecen pintados en la tabla 2.5, obtenemos: $-12x^2 + 42x + 10 + 2x^3 - 6x^2 + 31x + 5 + 4x^3 - 3x^2 + 24x - 100 - 32x^2 + 39x - 20 = + 2x^3 - 4x^3 - 12x^2 - 6x^2 - 3x^2 - 32x^2 + 42x + 31x + 24x + 39x + 10 + 5 - 100 - 20 = 6x^3 - 53x^2 + 136x - 105$.

Al igual que en el caso anterior, si al polinomio obtenido $6x^3 - 53x^2 + 136x - 105$, aplicamos la regla de Ruffini para factorarlo se obtiene $(x - 5)(2x - 3)(3x - 7)$.

$4x^3 - 5x^2 + x - 5$	$6x^3$	$4x^3 - 3x^2 + 24x - 100$	$4x^3 - 20x^2 + x - 20$
$-17x^2 + 39x - 5$	$2x^3 - 12x^2 + 38x$	$-15x^2 + 62x - 100$	$-32x^2 + 39x - 20$
$-12x^2 + 42x + 10$	$2x^3 - 7x^2 + 41x + 15$	$-10x^2 + 65x - 85$	$-27x^2 + 42x - 5$
$-11x^2 + 32x$	$2x^3 - 6x^2 + 31x + 5$	$-9x^2 + 55x - 95$	$-26x^2 + 32x - 15$

Tabla 2.6. Tabla mágica con cuatro polinomios pintados, posibilidad 3.

Al sumar los cuatro polinomios que aparecen pintados en la tabla 2.6, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & -11x^2 + 32x + 2x^3 - 12x^2 + 38x - 10x^2 + 65x - 85 + 4x^3 - 20x^2 + x - 20 = \\
 & 2x^3 + 4x^3 - 11x^2 - 12x^2 - 10x^2 - 20x^2 + 32x + 38x + 65x + x - 85 - 20 = 6x^3 - 53x^2 + 136x - 105
 \end{aligned}$$

Si a $6x^3 - 53x^2 + 136x - 105$ aplicamos la regla de Ruffini para factorarlo obtenemos $(x - 5)(2x - 3)(3x - 7)$.

CAPÍTULO 3. RAZONAMIENTO NUMÉRICO

3.1. Problema de la medida

Tenemos dos vasijas, una de 11 litros y la otra de siete litros. Queremos recoger exactamente seis litros de agua sin la ayuda de ninguna otra vasija. ¿Cómo resolverlo? (Tuapanta, 2014).

Solución

1) Primero llenamos la vasija de siete litros, y vaciamos en la de 11 litros; falta por llenar en esta cuatro litros (ver figura 3.1).

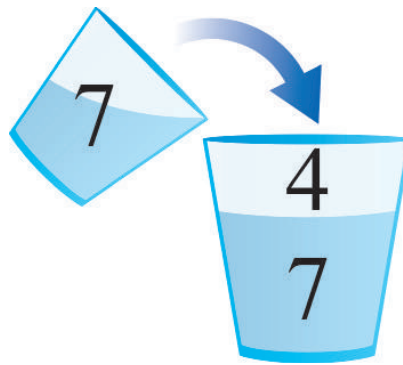


Figura 3.1. Primera fase de llenado y vaciado

2) Nuevamente llenamos la vasija de siete litros, y completamos el contenido de la de 11; quedándonos en la de siete, tres litros (ver figura 3.2).

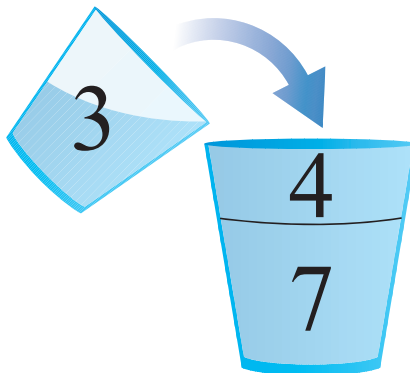


Figura 3.2. Segunda fase de llenado y vaciado

3) Vaciamos la vasija de 11, y los tres litros de la de siete, los colocamos en la de 11 (ver figura 3.3).

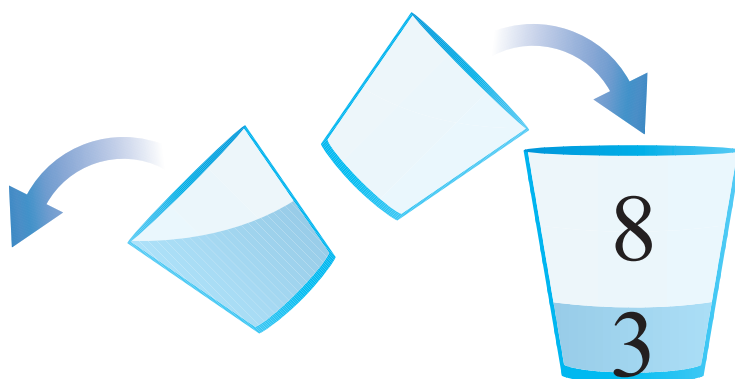


Figura 3.3. Tercera fase de llenado y vaciado

4) Volvemos a llenar la de siete litros, y la vaciamos en la vasija de 11, con lo cual se obtienen 10 litros; faltándonos por llenar en la misma un litro, ver figura 3.4

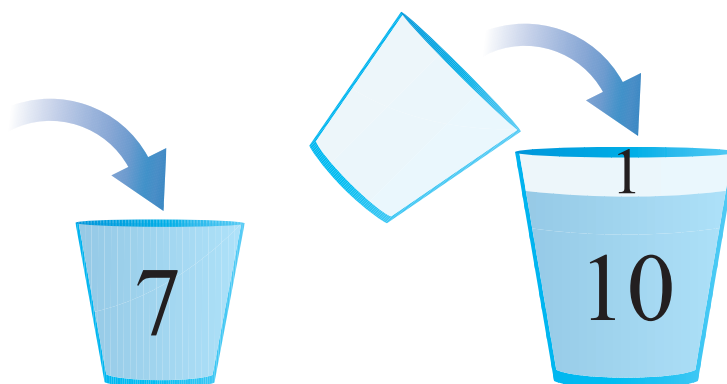


Figura 3.4. Cuarta fase de llenado y vaciado.

5) Por última vez, llenamos la vasija de siete litros y completamos el contenido de la de 11; quedándonos en la vasija de siete litros un total de seis litros, con lo cual se llega a la solución del problema (ver figura 3.5).



Figura 3.5. Fase final de llenado y vaciado

¡Fácil! ¿Verdad?

3.2. El gato trepador

Un gato se cayó a un pozo que tiene una profundidad de 10 metros. Inmediatamente se puso a trepar para intentar salvarse. Cada día subía tres metros, pero luego se escurría y bajaba dos metros (gato vanidoso). ¿Cuántos días tardará en salir del pozo? (Tuapanta, 2014).

Solución

Según las condiciones planteadas por el problema:

El primer día: el gato sube hasta encontrarse a la altura de tres metros sobre el fondo del pozo, pero al mismo tiempo, por ser vanidoso, retrocede dos metros, encontrándose ahora a la altura de un metro del fondo.

El segundo día: vuelve a subir, desde el primer metro hasta el cuarto metro, pero en el mismo instante baja dos metros, quedándose a una altura de dos metros.

El tercer día: el gato sube desde el segundo metro hasta el quinto metro, pero vuelve a resbalar dos metros, quedándose a una altura de tres metros. El gato, en realidad, sube un metro por día (pues sube tres y resbala dos), así en el séptimo día el gato no habrá salido todavía del pozo, pues se encontrará a una altura de siete metros del fondo.

El octavo día: el gato logrará su cometido, pues al encontrarse a siete metros de altura, subirá nuevamente tres metros adicionales y ya no tendrá necesidad de escurrirse, pues habrá salido del pozo (ver figura 3.6).

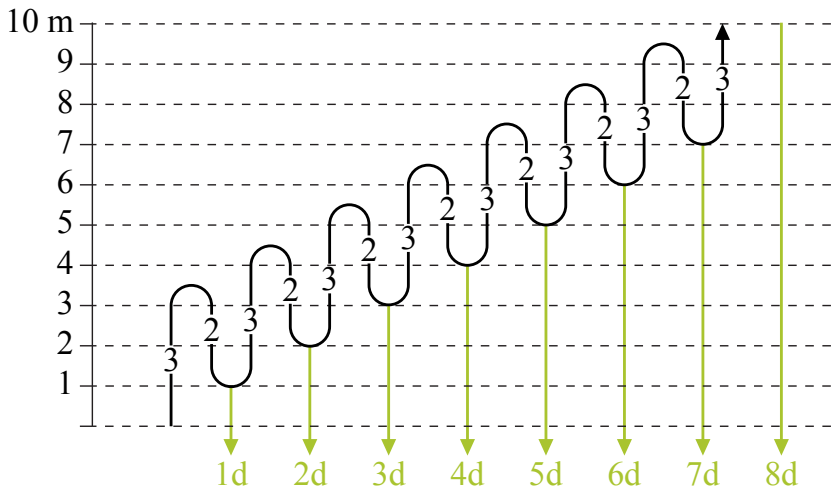


Figura 3.6 Número de días para salir de un pozo de 10 m

3.3. El poblado

En un poblado, hay siete casas; cada casa tiene siete gatos; cada gato mata siete ratones que, a su vez, se habían comido cada uno siete espigas de trigo, y cada una de estas espigas de trigo, al sembrarlas, producirían siete arrobas de grano. ¿Cuál es el total de grano? (Tuapanta, 2014).

Solución

Como vemos, el número siete es sin lugar a duda la clave para nuestro razonamiento; por consiguiente, para dar solución a este problema, debemos proceder como sigue: hay siete casas, y en cada casa habitan siete gatos:

$$7 \text{ casas} * \frac{7 \text{ gatos}}{\text{casa}} = 7^2 \text{ gatos}$$

Cada gato mata siete ratones:

$$7^2 \text{ gatos} * \frac{7 \text{ ratones}}{\text{gato}} = 7^3 \text{ ratones}$$

Los ratones se comen siete espigas de trigo cada uno:

$$7^3 \text{ ratones} * \frac{7 \text{ espigas}}{\text{ratón}} = 7^4 \text{ espigas}$$

Cada espiga produciría siete arrobas de grano:

$$7^4 \text{ espigas} * \frac{7 \text{ arrobas}}{\text{espiga}} = 7^5 \text{ arrobas}$$

En resumen, el total de grano que se produciría con las espigas que se comieron todos los ratones sería: $7^5 = 16\,807$ arrobas de grano.

3.4. La edad

Tres personas, Andrés, Milton y Carlos, dicen lo siguiente:

Andrés: Yo tengo 22 años, y dos menos que Milton y uno más que Carlos.

Milton: No soy el más joven, Carlos y yo tenemos tres años de diferencia. Carlos tiene 25 años.

Carlos: Yo soy más joven que Andrés. Andrés tiene 23 años. Milton tiene tres años más que Andrés.

Determine la edad de cada una de las personas sabiendo que únicamente una de las afirmaciones que hace cada persona es falsa. (Tuapanta, 2014).

Solución

Para resolver el problema debemos analizar las afirmaciones de las tres personas y comprobar así su veracidad. Empecemos buscando parejas de afirmaciones que se puedan contradecir, reduciendo así el número de posibilidades y ahorrando mucho esfuerzo en la resolución del problema.

Revisemos la primera afirmación de Andrés, “yo tengo 22 años”. Éste enunciado contradice con lo dicho por Carlos: “Andrés tiene 23 años”. En el segundo enunciado de Andrés, “yo tengo dos años menos que Milton”, le contradice la afirmación de Carlos: “Milton tiene tres años más que Andrés”. Y en el tercer enunciado de Andrés, “Yo tengo un año mas que Carlos”, coincide con lo que dice Carlos, “yo soy más joven que Andrés”.

Supongamos que la afirmación de Andrés “yo tengo 22 años” es falsa; entonces las afirmaciones “dos menos que Milton, y uno más que Carlos”, serían verdaderas.

Analicemos lo que Milton dice, “no soy el más joven”, esto sería verdadero, considerando el análisis anterior, de que Milton es el mayor. Además, él expresa. “Carlos y yo tenemos tres años de diferencia”, lo cual coincide con nuestro razonamiento, porque, si Andrés tiene dos menos que Milton y uno más que Carlos, entonces Milton y Carlos tienen una diferencia de tres años de edad. Todo esto nos lleva a concluir que la tercera proposición mencionada por Milton, “Carlos tiene 25 años”, es falsa.

Analicemos finalmente lo que Carlos dice: “Yo soy más joven que Andrés”, expresión que es correcta, ya que se consideró a Carlos como el menor de todos. Luego indica que “Andrés tiene 23 años”, afirmación que es verdadera, ya que satisface todas las condiciones consideradas como correctas; concluyéndose, finalmente, que su última expresión, “Milton tiene tres años más que Andrés”, es falsa; este último análisis lo podemos comprobar porque, si dijéramos que la expresión es verdadera, contradiría todo lo que hemos analizado anteriormente.

En conclusión, si sabemos que Andrés tiene 23 años, podemos concluir que Milton tiene 25 años (dos años más que Andrés) y Carlos tiene 22 años (uno menos que Andrés). Estas soluciones satisfacen todas las proposiciones consideradas como verdaderas, lo que significa que, nuestra suposición realizada, fue correcta. Las edades de los tres chicos se resumen en la tabla 3.1.

Nombres	Edad
Andrés	23
Milton	25
Carlos	22

Tabla 3.1. Edades de los tres chicos

3.5. Las vacas de Newton

Sabiendo que 75 vacas han comido, en 12 días, la hierba de un prado de 60 áreas y que 81 vacas han comido, en 15 días, la hierba de otro prado de 72 áreas, se desea saber cuántas vacas comerán en 18 días la hierba de un prado de 96 áreas (Tuapanta, 2014).

Nota: se debe considerar que los tres prados contienen la misma cantidad de hierba por área; además debemos suponer que todas las vacas consumen la misma cantidad.

Solución

A primera vista, alguien diría que la solución se puede obtener haciendo una regla de tres, y esto no es cierto. Si procediéramos a hallar la solución del problema con este procedimiento, la respuesta sería válida únicamente para una afirmación de las que hace el problema, pero no se cumpliría para la otra.

Debemos, por lo tanto, buscar una relación entre las dos hipótesis que plantea el problema, y aplicarla a la tercera.

Sabemos que 75 vacas comen, en 12 días, la hierba de 60 áreas (primera afirmación).

Además, sabemos que 81 vacas comen, en 15 días, la hierba de 72 áreas (segunda afirmación).

¿Cómo se relacionan entonces las afirmaciones? La respuesta la obtenemos a partir del análisis del número de vacas: en el primer caso tenemos 75 y en el segundo 81, es decir, han aumentado seis vacas.

Analicemos los días: en la primera afirmación tenemos 12 y en la segunda, 15, es decir, el aumento de días es tres.

Finalmente, ¿en cuánto aumentan las áreas?, $72 - 60 = 12$ áreas de aumento. Resumiendo lo anterior, los resultados serían los presentados en la tabla 3.2.

	Vacas	Días	Áreas
Afirmación 1	75	12	60
Afirmación 2	81	15	72
Incremento	6	3	12

Tabla 3.2. Número de vacas, días y áreas según afirmaciones e incremento; fase 1.

Comparemos ahora la segunda condición del problema, con la tercera: no conocemos el aumento ni el número de vacas, por lo que debemos determinarlo.

Los días son 15 y 18, por lo tanto, el incremento de días es tres. Finalmente, en la segunda hipótesis del problema tenemos 72 áreas y en la tercera tenemos 96 áreas; esto significa que se han aumentado 24 áreas (ver tabla 3.3).

	Vacas	Días	Áreas
Afirmación 1	75	12	60
Afirmación 2	81	15	72
Afirmación 3	?	18	96
Incremento 1-2	6	3	12
Incremento 2-3	?	3	24

Tabla 3.3. Número de vacas, días y áreas según afirmaciones e incremento; fase 2.

Busquemos ahora una relación entre los dos incrementos encontrados. El número de días se mantiene igual en ambos casos, pero el número de áreas que aumentamos se ha duplicado en el segundo caso.

Pensemos, si el incremento en áreas es el doble, conservando el mismo incremento en los días necesarios para que las vacas coman el pasto; dado que los animales comen la misma cantidad de pasto y los prados tienen la misma cantidad de hierba por área, entonces concluimos que necesitaré un incremento mayor de vacas para conservar esta relación (si dejo el mismo incremento de vacas, es decir, seis, necesitaré un mayor incremento de días).

Por consiguiente, duplico el incremento de vacas de seis a 12 y, como en la segunda afirmación del problema teníamos 81 vacas, entonces $81 + 12 = 93$.

Esto significa que se necesitan 93 vacas para que coman en 18 días un prado de 96 áreas. Todo lo anterior, se resume en la tabla 3.4.

	Vacas	Días	Áreas
Afirmación 1	75	12	60
Afirmación 2	81	15	72
Afirmación 3	93	18	96
Incremento	6	3	12
Incremento	12	3	24

Tabla 3.4. Número de vacas, días y áreas según afirmaciones e incremento

3.6. Los huevos de gallina y pato

Se dispone de seis cestas que contienen huevos; una de ellas contiene cinco, la otra seis, y las restantes: 12, 14, 29 y 23 respectivamente. En una de las cestas hay huevos de gallina, en las otras de pato. “Si vendo esta cesta meditaba el vendedor me quedará el doble de huevos de gallina que de pato”. ¿A qué cesta se refiere el vendedor? (Perelmann, 1968, p. 93).

Solución

Determinemos la cesta que se va a vender para que quede el doble de huevos de gallina que de pato. Procedamos entonces a la posible venta de cada una de las cestas y registramos el número de huevos que sobra en cada caso. Por ejemplo, si vende la cesta uno, que contiene cinco huevos, nos quedarían 84 de un total de 89 huevos; y así sucesivamente, ver tabla 3.5.

CESTA ELIMINADA	1	2	3	4	5	6
HUEVOS	5	6	12	14	29	23
RESTO DE HUEVOS	84	83	77	75	60	66
TOTAL	89	89	89	89	89	89

Tabla 3.5. El cuadro muestra las cestas eliminadas y el número de huevos restantes.

Para que pueda cumplirse que el número de huevos de gallina sea el doble que los de pato, el número sobrante de huevos debe ser divisible para tres (por ejemplo, si tenemos cuatro huevos de pato, el doble de huevos de gallina sería ocho y el número total de huevos es 12, número divisible para tres); lo mismo se cumple para cualquier cantidad de huevos de pato y el doble de gallina.

Veamos cuáles de las cantidades sobrantes en huevos son divisibles para tres (ver tabla 3.6).

CESTA ELIMINADA	1	2	3	4	5	6
HUEVOS	5	6	12	14	29	23
RESTO DE HUEVOS	84	83	77	75	60	66
DIVISIBLE POR 3	SÍ	NO	NO	SÍ	SÍ	SÍ

Tabla 3.6. Cestas eliminadas, número de huevos restantes y su divisibilidad para tres.

En conclusión, podemos vender los huevos únicamente de las cestas uno, cuatro, cinco y seis para que se cumpla la condición antes mencionada.

¿Cómo determinamos ahora la cesta a la que se refiere el vendedor? De los restos de huevos, al ser vendidas las cestas (1, 4, 5 y 6); $\frac{1}{3}$ corresponderían a los huevos de pato y $\frac{2}{3}$ a los de gallina (para se cumple la relación del doble de huevos de gallina que de pato) (ver tabla 3.7).

CESTA ELIMINADA	1	2	3	4	5	6
HUEVOS	5	6	12	14	29	23
RESTO DE HUEVOS	84	83	77	75	60	66
DIVISIBLE POR 3	SÍ	NO	NO	SÍ	SÍ	SÍ
$\frac{2}{3}$ (H. DE GALLINA)	56			50	40	44
$\frac{1}{3}$ (H. DE PATO)	28			25	20	22

Tabla 3.7. Cestas que cumplen y no cumplen con las condiciones del vendedor

Si vendemos la cesta uno, tendremos un sobrante de 56 huevos de gallina y 28 de pato. Al vender la cesta cuatro, tendremos un sobrante de 50 huevos de gallina y 25 de pato. Vendiendo la cesta cinco, nos sobrarían 40 huevos de gallina y 20 de pato. Pero al vender la cesta seis, nos quedarían 44 huevos de gallina y 22 de pato. Tenemos entonces al momento cuatro soluciones posibles, pero debemos buscar la que se acomode perfectamente al número de huevos que sobran en las otras cestas.

Si vendemos la canasta uno, los números 56 y 28 no se obtendrían de la suma del número de los huevos que quedan en las canastas restantes, es decir, ninguna combinación de 6, 12, 14, 29 y 23 huevos sobrantes, al ser sumados nos daría el par de números buscados; igual sucede al vender las canastas cuatro y seis, no se podrán obtener las parejas de números 50, 25 y 44, 22.

Si vendemos la canasta cinco de 29 huevos, nos quedan:

$$6 + 14 = 20 \text{ huevos de pato (canastas 2 y 4).}$$

$$5 + 12 + 23 = 40 \text{ huevos de gallina (canastas 1, 3 y 6).}$$

Por lo tanto, la canasta a la que se refería el vendedor es la de 29 huevos, la cual vende.

3.7. La tabla mágica

En la tabla 3.8, escoja una fila (o columna), seleccione un número y píntelo o encierre en un círculo, repita la misma acción con las demás filas (o columnas), al final en cada una de las filas y columnas debe quedar pintado o encerrado en un círculo un único número. Suma los ocho números que quedaron pintados y compruebe que el resultado es 19 (adaptación del juego que aparece bajo el título “Magic with a matrix”) (Ezquerro, 2011, pp. 21-22).

-3	9	15	-2	14	18	-18	-4
-8	4	10	-7	9	13	-23	-9
3	15	21	4	20	24	-12	2
1	13	19	2	18	22	-14	0
-14	-2	4	-13	3	7	-29	-15
15	27	33	16	32	36	0	14
-12	0	6	-11	5	9	-27	-13
-16	-4	2	-15	1	5	-31	-17

Tabla 3.8. Tabla mágica

Solución

A continuación, se muestran algunas tablas en las que aparece pintado ocho números luego de haber realizado las acciones solicitadas por el problema. Y se comprueba que el resultado de la suma de esos números es 19:

-3	9	15	-2	14	18	-18	-4
-8	4	10	-7	9	13	-23	-9
3	15	21	4	20	24	-12	2
1	13	19	2	18	22	-14	0
-14	-2	4	-13	3	7	-29	-15
15	27	33	16	32	36	0	14
-12	0	6	-11	5	9	-27	-13
-16	-4	2	-15	1	5	-31	-17

Tabla 3.8. Tabla mágica

Al sumar los números que aparecen pintados en la tabla 3.9, obtenemos:

$$-3 + 4 + 21 + 2 + 3 + 36 - 27 - 17 = 19.$$

-3	9	15	-2	14	18	-18	-4
-8	4	10	-7	9	13	-23	-9
3	15	21	4	20	24	-12	2
1	13	19	2	18	22	-14	0
-14	-2	4	-13	3	7	-29	-15
15	27	33	16	32	36	0	14
-12	0	6	-11	5	9	-27	-13
-16	-4	2	-15	1	5	-31	-17

Tabla 3.10. Tabla mágica con ocho números pintados, posibilidad 2.

Al sumar los números que aparecen pintados en la tabla 3.10, obtenemos: $15 + 9 - 12 + 22 - 15 + 16 + 0 - 16 = 19$.

-3	9	15	-2	14	18	-18	-4
-8	4	10	-7	9	13	-23	-9
3	15	21	4	20	24	-12	2
1	13	19	2	18	22	-14	0
-14	-2	4	-13	3	7	-29	-15
15	27	33	16	32	36	0	14
-12	0	6	-11	5	9	-27	-13
-16	-4	2	-15	1	5	-31	-17

Tabla 3.11. Tabla mágica con ocho números pintados, posibilidad 3.

Al sumar los números que aparecen pintados en la tabla 3.11, obtenemos:
 $3+13+33-13+5+18-31-9=19$.

NOTA: se puede deducir de las tres tablas anteriores que, en cada fila o columna, debe haber un solo número pintado (o encerrado en un círculo), para que se cumplan las condiciones exigidas por el problema.

Si se preguntan, cómo es posible que se sepa de antemano que la suma sea siempre 19, al sumar cualquier combinación de ocho números pintados (o encerrados en un círculo) bajo las condiciones exigidas por el problema, les dire que la respuesta esta en la tabla 3.12. En ella aparecen una nueva fila y columna, que fueron ocultados en la tabla 3.8, con los sumandos de los números obtenidos en la tabla antes mencionada. Si a los números que aparecen en la fila y columna oculta los sumamos obtendremos como resultado 19.

+	-5	7	13	-4	12	16	-20	-6
2	-3	9	15	-2	14	18	-18	-4
-3	-8	4	10	-7	9	13	-23	-9
8	3	15	21	4	20	24	-12	2
6	1	13	19	2	18	22	-14	0
-9	-14	-2	4	-13	3	7	-29	-15
20	15	27	33	16	32	36	0	14
-7	-12	0	6	-11	5	9	-27	-13
-11	-16	-4	2	-15	1	5	-31	-17

Tabla 3.12. Tabla mágica completa

Entonces, para saber la suma de los ocho números pintados (o encerrados en círculos), basta con sumar los números de la fila y columna que fueron ocultados para el lector, en nuestro caso sumamos los números de la fila y columna pintados en la tabla 3.12:

Fila: $-5 + 7 + 13 - 4 + 12 + 16 - 20 - 6 = 13.$

Columna: $2 - 3 + 8 + 6 - 9 + 20 - 7 - 11 = 6 .$

Al sumar los dos resultados obtenemos 19.

3.8. Diversas tablas mágicas

Para que una tabla numérica sea considerada mágica, en cada una de las casillas que conforman la misma, se deben colocar números sin repetir, de modo de obtener siempre la misma suma, en cada fila, en cada columna y en cada diagonal.

Para construir las tablas mágicas, que aquí se presentan, se utilizan números que son elementos de una sucesión aritmética.

Nota: una sucesión de números es aritmética si la diferencia de dos términos consecutivos cualesquiera de la secuencia es una constante. Por ejemplo:

- 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16; es una sucesión aritmética, porque la diferencia entre cualquier pareja de elementos consecutivos es 2 ($4 - 2 = 6 - 4 = 14 - 12 = 2$).
- 5, 2, -1, -4, -7, -10, -13, -16; es una sucesión aritmética, y la diferencia entre cualquier pareja de elementos consecutivos es 3 ($5 - 2 = -10 - (-7) = -16 - (-13) = -3$).

Construir las tablas mágicas, en cada uno de los casos, bajo las condiciones pedidas:

a) Colocar los números 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 y 18 en las casillas de una tabla de 3x3, de tal forma que en cada fila, columna y diagonales la suma sea 30.

Solución

Para colocar los números, lo primero es ordenar en forma descendente o ascendente: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.

Luego identificamos el número central y lo colocamos en la casilla del centro de la tabla; en este caso, el 10. Tomando como centro el 10, cogemos los valores laterales 2 y 18, y los ubicamos en las casillas, este procedimiento lo repetimos hasta ubicar todos los valores cumpliendo con lo pedido por el problema.

La tabla 3.13, muestra cómo quedan ubicados los números para que su suma tanto en filas, columnas y diagonales sea 30.

12	2	16
14	10	6
4	18	8

Tabla 3.13. Tabla mágica de 3x3, cuya suma es 30.

b) Colocar los números 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 y 27 en las casillas de una tabla 3x3, de tal forma que, en cada fila, columna y diagonales, la suma sea 45.

Solución

A igual que en el problema anterior, ordenamos en forma descendente o ascendente: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27.

Identificamos el número central, el 15, y lo colocamos en la casilla del centro de la tabla. Tomando como centro el 15, cogemos los valores laterales 3 y 27, y los colocamos en las casillas, este procedimiento lo repetimos hasta ubicar todos los valores cumpliendo con lo pedido por el problema. La tabla 3.14 muestra como quedan ubicados los números para que su suma tanto en filas, columnas y diagonales sea 45.

18	3	24
21	15	9
6	27	12

Tabla 3.14. Tabla mágica de 3x3, cuya suma es 45

c) Coloquemos los múltiplos de cinco hasta el 80 en las casillas de una tabla 4x4, de tal forma que en cada fila, columna y diagonales la suma sea 170.

Nota: los múltiplos del 5 hasta el 80 son: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75 y 80.

Solución

Ordenamos los números en forma ascendente:

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80.

Identificamos las parejas de números por sus colores y lo ubicamos en las respectivas casillas como se muestra en la tabla 3.15.

Cabe señalar que este tipo de tablas mágicas de 4x4 son un poco más complicadas de construir, como lo puede evidenciar el lector.

5	75	70	20
60	30	35	45
40	50	55	25
65	15	10	80

Tabla 3.15. Tabla mágica de 4x4, cuya suma es 170

3.9. La matriz mágica

En la tabla 3.16, escoja una fila (o columna), seleccione una matriz y pntela encierre en un círculo; repita la misma acción con las demás filas (o columnas), al final en cada una de las filas y columnas debe quedar pintado o encerrado en un círculo una única matriz.

Sume las cuatro matrices pintadas o encerradas en un círculo, y compruebe que la matriz resultante es

$$\begin{pmatrix} 13 & 11 \\ -3 & 26 \end{pmatrix}$$

Nota: una matriz es un arreglo de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

La operación de suma entre las matrices $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ se define de la siguiente forma:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Tabla 3.16. Tabla mágica de matrices

Solución

A continuación, se muestran algunas tablas con cuatro matrices pintadas, luego de haber realizado las acciones solicitadas por el problema. Y se comprueba que el resultado de la suma de esas matrices es

$$\begin{pmatrix} 13 & 11 \\ -3 & 26 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Tabla 3.17. Tabla con cuatro matrices pintadas, posibilidad 1.

$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Tabla 3.18. Tabla con cuatro matrices pintadas, posibilidad 2.

Al sumar las matrices que aparecen pintadas en la tabla 3.17, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+2+4+1 & 3+2+4+2 \\ 2-5-1+1 & 6+8+10+2 \end{pmatrix} \\
 = \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ -3 & 26 \end{pmatrix}$$

Y al sumar las matrices que aparecen pintados en la tabla 3.18, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9+2+1 & 3+4+2+2 \\ 3-2-5+1 & 9+7+8+2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ -3 & 26 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Tabla 3.19. Tabla con cuatro matrices pintadas, posibilidad 3.

Sumando las matrices pintados en la tabla 3.19, nos da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4+3+5 & 3+4+1+3 \\ 4-1-5-1 & 5+10+3+8 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ -3 & 26 \end{pmatrix}$$

3.10. Figuras de un solo trazo

Para construir una figura de un solo trazo, es decir, sin levantar el lápiz del papel ni pasar dos veces por el mismo lugar, debemos identificar la cantidad de vértices pares (punto en el cual concurren un número par de líneas) e impares (punto en el cual concurren un número impar de líneas) que tiene la figura.

Si todos los vértices son pares, la figura puede ser dibujada de un solo trazo.

Si tiene dos vértices impares, la figura puede ser dibujada de un solo trazo. Se comienza en un vértice impar y se termina en el otro vértice impar. Si tiene más de 2 vértices impares, la figura no se puede dibujar de un solo trazo.

Compruebe si las figuras que a continuación se exponen se pueden realizar con un solo trazo. Recuerde que la figura debe ser trazada sin levantar el lápiz del papel.

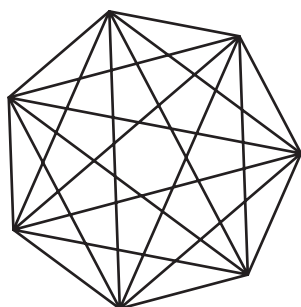


Figura 3.7. Heptágono y sus diagonales

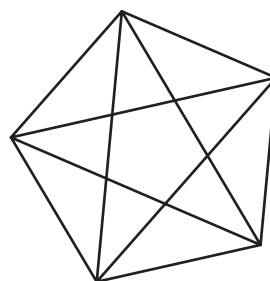


Figura 3.8. Pentágono y sus diagonales de un solo trazo.

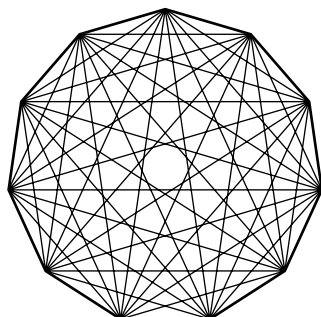


Figura 3.9. Endecágono y sus diagonales

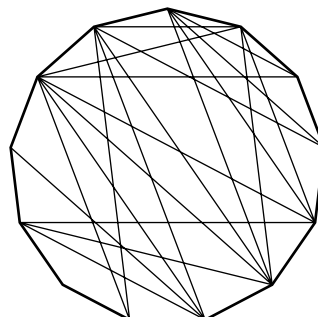


Figura 3.10. Tridecágono y sus diagonales de un solo trazo.

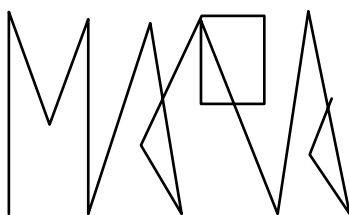


Figura 3.11. Trazo irregular de un solo

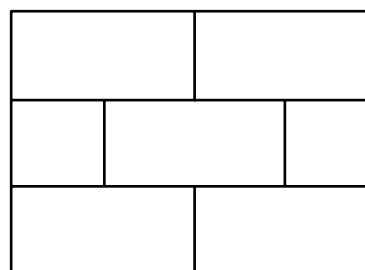


Figura 3.12. Rectángulo cuadrulado de un solo trazo.

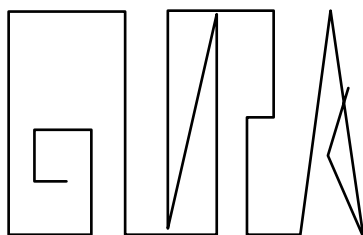


Figura 3.13. Trazo irregular de un solo

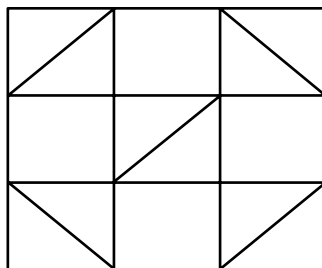


Figura 3.14. Rectángulo cuadrículado de un solo trazo

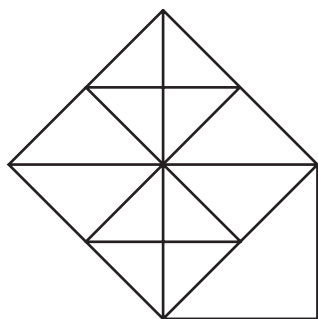


Figura 3.15. Figura geométrica de un solo trazo

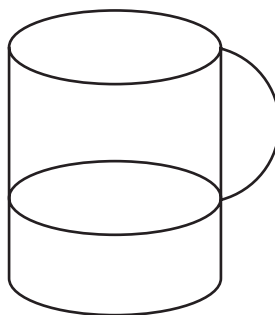


Figura 3.16. Figura cilíndrica de un solo trazo

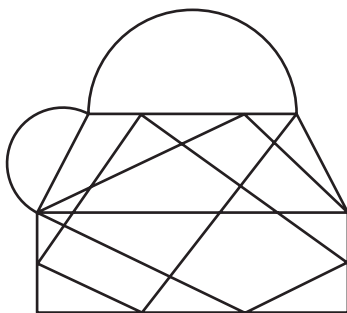


Figura 3.17. Figura geométrica de un solo trazo

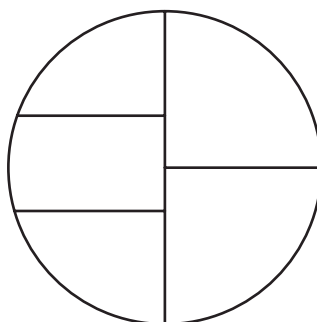


Figura 3.18. Círculo seccionado de un solo trazo

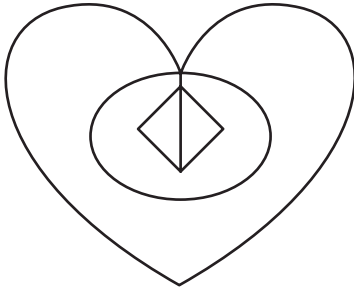


Figura 3.19. Corazón con figuras geométricas de un solo trazo.

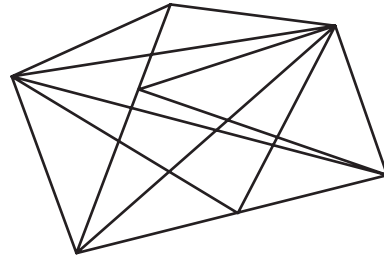


Figura 3.20. Figura tridimensional de un solo trazo.

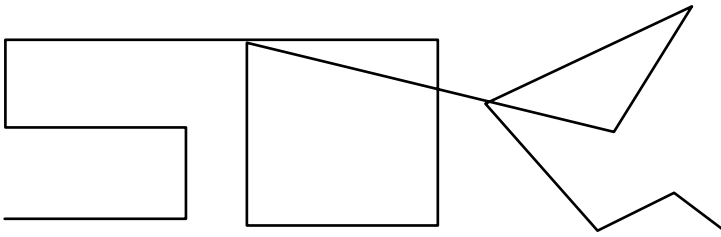


Figura 3.21. Escritura de un nombre con un solo trazo.

CAPÍTULO 4. PROBLEMAS PROPUESTOS

RAZONAMIENTO LÓGICO

4.1. El robo

En la trifulca de un robo, cinco sospechosos acaban de ser apresados. Pero no se sabe quién es ladrón y quién es inocente. Comienza el interrogatorio. Lógicamente, los inocentes dicen siempre la verdad, mientras los ladrones mienten siempre.

Rubén dice que Miguel es un ladrón Miguel jura que Wilson es inocente Wilson sostiene que Jaime es un ladrón Jaime afirma que Mario es inocente. Para Mario, Miguel y Wilson son ladrones

¿Quiénes son los ladrones Y quiénes son los inocentes? (Tuapanta, 2014).

4.2. Paseo de amigos

Gabriel, Mauro y Jorge se pasean en bicicletas. Cada uno está en la bicicleta de uno de sus amigos y tiene puesto el casco del otro. ¿Quién lleva el casco de Gabriel y la bicicleta de Mauro? ¿Quién lleva el casco de Jorge y la bicicleta de Gabriel? (Tuapanta, 2014).

4.3. El robo de joyas

El ama de llaves de la señorita Verónica decide robar las joyas de su patrona. Estas están guardadas en cuatro cajas de colores diferentes: amarilla, roja, azul y verde.

El ama de llaves recuerda que cada caja contiene dos objetos diferentes. Una caja guarda una esclava y unos pendientes; otra un anillo de diamantes y un collar de perlas.

La caja roja contiene una esclava y un anillo de diamantes. La caja amarilla está situada entre la roja y la azul.

La caja roja está situada a la derecha de la verde.

Cada una de las dos cajas de la derecha contiene un collar de perlas y en cada una de las cajas de la izquierda hay una esclava.

La caja que se halla a la derecha de la amarilla contiene un collar de perlas y unos pendientes.

Al momento del robo, por miedo a ser sorprendida, el ama de llaves de la señorita Verónica coge las cajas amarilla y verde, y escapa.

¿Qué contenía cada una de las cajas que robó?

4.4. La araña trepadora

Si una araña sube 3 m y resbala 2 m sobre una pared, si por cada 3 m en subir se demora dos horas ¿En cuánto tiempo alcanzará una altura de 10 m? (Tuapanta, 2014).

4.5. El herrero

A un herrero le entregaron ocho trozos de cadena: cinco trozos de cuatro eslabones cada uno, dos trozos de cinco eslabones cada uno, y un trozo de seis eslabones; y, le encargaron que los uniera formando una cadena continua. Antes de poner manos a la obra, el herrero comenzó a meditar sobre el número de anillos que tendría necesidad de cortar y forjar de nuevo.

Decidió que le haría falta abrir y cerrar 7 anillos.

¿Es posible hacer el trabajo abriendo y enlazando un número menor de anillos? (Adaptación al problema de la cadena) (Perelmann, 1968, p. 91)

4.6. La medida

Tenemos dos vasijas, una de cinco litros y la otra de tres litros. Queremos recoger exactamente cuatro litros de agua sin la ayuda de ninguna otra vasija. ¿Cómo resolverlo? (Tuapanta, 2014).

4.7. La fiesta

Cuatro parejas están de fiesta, sus nombres son: Katty, Emanuel, Franco, Betty, Alexandra, Dunia, Gustavo y Henry. En cierto momento, Franco se pone a tocar la trompeta acompañada por Katty al piano. Dunia, que no es la mujer del trompetista, no quiere bailar, Henry se queda sentado para acompañarla. Entonces, los dos se dan cuenta que la mujer de Emanuel no baila con su marido sino con el de Alexandra. ¿Quién es la mujer de Henry? Y ¿quién es la mujer de Franco? (Tuapanta, 2014).

4.8. Los amigos de la universidad

Cinco personas que fueron amigas en la Universidad asisten a un Seminario Internacional.

Se trata de Andrés, Disraelí, Franco, Elena y Mayra cuyas profesiones son: arquitecto, diseñador gráfico, físico nuclear, electrónico y matemático.

Ellos viven en Argentina, Dinamarca, Francia, España y México, pero ninguno de ellos vive en el país que tiene la misma inicial de su nombre, ni el nombre de su ocupación tiene la misma inicial que su nombre o que la del nombre del país en el cual vive.

El electrónico no vive en Francia. Elena no es diseñadora gráfica; tampoco vive en Francia ni en Dinamarca.

Disraelí vive en Argentina y no es electrónico ni matemático. Mayra no es residente en España, como tampoco Andrés, quien no es matemático ni diseñador gráfico. Disponiendo solamente de la información dada.

¿puede Usted determinar el nombre del país en que reside Andrés y cuál es su profesión? (Tuapanta, 2014).

4.9. De compras en el pasaje comercial

Las señoritas: María, Mery, Paulina, Myrian, Mayra y Gloria fueron juntas de compras al pasaje comercial El Caracol.

Cada una de las hermosas y encantadoras señoritas fue directamente al piso en el cual se hallaba el artículo de regalo que querían comprar; cada una de ellas compró dos artículos. Compraron una tarjeta de navidad, un globo, un osito de peluche, una muñeca de trapo, una esclava, un libro, un portarretratos, una caja de música, un reloj, una agenda, una lámpara y un crucifijo.

Todas las señoritas, excepto Gloria, entraron en el ascensor en el primer piso. También entraron en el ascensor dos caballeros. Dos señoritas, Paulina y la que compró la esclava y el reloj, descendieron en el segundo piso. En el tercer piso vendían tarjetas y globos. Los caballeros descendieron en el cuarto piso. La señorita que compró el libro y la agenda descendió en el quinto piso y dejó a Mayra que descendió sola en el sexto piso.

En la fiesta de Navidad, Mery, que recibió una caja musical y un crucifijo como regalo sorpresa de una de las señoritas que había descendido en el segundo piso, presencié el agradecimiento que su enamorado le hiciera por el reloj que diera una de las otras chicas.

Si en el primer piso se vendían regalos de trapo y felfa, y la señorita Myrian fue la sexta persona en salir del ascensor, ¿qué cosas compraron cada una de estas hermosas y encantadoras chicas? (Tuapanta, 2014).

4.10. Las tres parejas

Tres parejas: Henry y Mery, Richard y Tatiana, y Geovanny y Katty, se encuentran junto a un río que se proponen atravesar.

Solo disponen de una pequeña embarcación sin barquero, apta para transportar únicamente dos personas a la vez.

¿Cómo pasarán esas seis personas de manera que ninguna mujer quede en compañía de dos hombres, si su marido no está presente? (Adaptación al problema Los tres maridos celosos) (Malba Tahan, 2000).

4.11. El almuerzo

Jorge invitó recientemente a almorzar a cinco de sus mejores amigos, ellos son: Miguel, Jaime, Fernando, Rubén y Julio; los mismos que se sentaron alrededor de una mesa circular. Uno de ellos es inteligente, otro trabajador, otro amoroso, otro divertido, otro es serio y otro es extrovertido. El señor que es inteligente se sentó frente a Julio. El que es extrovertido se sentó frente a Miguel, quien a su vez se sentó entre el señor que es inteligente y el que es divertido. El señor que es trabajador se sentó frente a Jorge, junto al señor que es extrovertido y a la izquierda del que es inteligente. El señor que es divertido se sentó entre Miguel y el señor que se sentó enfrente del que es inteligente. Rubén, que es extrovertido se sentó a la izquierda del que es trabajador y frente al que es amoroso.

¿Puede usted identificar a cada uno de estos amigables y responsables chicos?

4.12. Los tres candidatos

Para escoger un novio entre tres candidatos, un médico, un banquero y un arquitecto, una chica decide someterlos a una prueba: sobre la cabeza de cada uno de ustedes se colocará una bola, cuyo color no lo podrán ver, pero si verán el color de la bola colocada sobre la cabeza de los demás. Los colores se escogerán entre cinco bolas, tres verdes y dos amarillas; el primero que diga el color de la bola que tiene sobre su cabeza será mi novio; el que se equivoque será mi sirviente durante un año. Uno de ellos, el arquitecto, que ve una bola verde sobre la cabeza de los otros dos, afirma con seguridad, viendo que los otros dos no dicen nada, "yo tengo una bola verde". Explique su razonamiento. (Adaptación del problema Los tres novios de Dahize) (Malba Tahan, 2000, p. 198).

4.13. La reunión

En una reunión, se encuentran un publicista, un novelista, un dentista y un profesor. Ellos se llaman Piero, Carlos, Lalo y Luis, no necesariamente en ese orden.

Además:

- I. Piero y el publicista están enojados con Luis.
- II. Carlos es amigo del profesor.
- III. El novelista es familiar de Luis.
- IV. El dentista es vecino de Lalo y del profesor.
- V. Piero acaba de publicar un libro.

¿Quién es el dentista? Y ¿quién es el publicista? (Santillana, 2012, p. 17).

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

4.14. La huelga

Los obreros de una fábrica se declaran en huelga. La cuarta parte de ellos cobra un jornal de \$ 40, la tercera parte de \$ 30, y el resto de \$ 25. La huelga duró 18 días y al reintegrarse al trabajo se les abonó la sexta parte de lo que hubieran ganado en los 18 días, con lo cual perdieron los obreros \$ 164 250 ¿Cuántos son los obreros? (Tuapanta, 2014).

4.15. Los cuatro hermanos

Cuatro hermanos tienen \$ 45. Si el dinero del primero es aumentado en \$ 2, el del segundo reducido en \$ 2, el del tercero se lo duplica y el del cuarto se reduce a la mitad, entonces todos los hermanos tendrán la misma cantidad de dólares. ¿Cuánto dinero tenía cada uno? (Perelman, 2015, p. 37).

4.16. La edad del hijo

La edad de un padre y la de su hijo suman 45 años. Si el padre tuviera 15 años menos y el hijo seis años más, los dos tendrían la misma edad. Dentro de tres años, cuál será la edad del hijo (Santillana, 2012, p. 56).

4.17. Tu edad y la mía

Soy mayor en cuatro años que el cuadrado de tu edad, y menor en ocho años que el cuadrado de la edad que tendrás el próximo año. ¿Cuáles son nuestras edades? (Santillana, 2012, p. 54).

4.18. Costo de las compras

Al salir de compras de una tienda de Miami, llevaba en el portamonedas unos \$15 en piezas de \$ 1 y piezas de 20 centavos.

Al regresar, traía tantas monedas de \$ 1, como monedas de 20 centavos que tenía al comienzo, y tantas monedas de 20 centavos como piezas de \$ 1 tenía antes. En el portamonedas me quedaba un tercio del dinero que llevaba al salir de compras. ¿Cuánto costaron las compras?

4.19. Las canicas

Sebastián sale de casa con un montón de canicas y vuelve sin ninguna. Su padre le pregunta que ha hecho con ellas y el niño contesta: a cada amigo que me encontré le di la mitad de las canicas que tenía más tres.

¿Y a cuántos amigos te has encontrado? A seis.

¿Cuántas canicas tenía Sebastián al salir de casa?

4.20. El examen

En un curso de cinco personas, se entrega a cada uno un examen con 20 preguntas: se dan cinco puntos por cada respuesta correcta y se quitan tres puntos por cada respuesta errada:

- a. El primer estudiante responde a todas las preguntas y obtiene 84 puntos.
- b. El segundo estudiante responde a todas las preguntas y obtiene 68 puntos.
- c. El tercer estudiante responde a 17 preguntas y obtiene 53 puntos.
- d. El cuarto estudiante responde a 15 preguntas y obtiene 43 puntos.
- e. El quinto estudiante responde a 13 preguntas y obtiene 57 puntos.

¿Cuántas preguntas contesta correctamente cada estudiante?

4.21. Las vacaciones

En un instante dado, en el Complejo Deportivo El Valle, un grupo de vacacionistas está nadando, y otros jugando cartas; la octava parte del total está jugando básquet y la cuarta parte del total jugando indor fútbol. Después de un momento, dos dejan la natación por el básquet; tres, el juego de cartas por el fútbol; cinco, el fútbol por la natación; siete la natación por el juego de cartas, tres dejan el básquet por el juego de cartas; uno, la natación por fútbol y uno deja el fútbol por el básquet, con lo cual el número de jugadores de cartas excede en dos al de nadadores; el de futbolistas exceden en cuatro al de basquetbolistas y el grupo de jugadores de cartas excede en dos al de natación.

- a. ¿Cuál es el número de vacacionistas?
- b. ¿Cuál es el número de vacacionistas en las diferentes disciplinas después de registrados los cambios?
- c. ¿Cuál es el número de vacacionistas en las diferentes disciplinas antes de registrados los cambios?

4.22. Los días de vacaciones

Un estudiante salió de vacaciones por x días y observó que, durante todas sus vacaciones, llovió siete veces, ya sea por la mañana o por la tarde. Cuando llovía por la tarde, estaba clara la mañana. Hubo cinco tardes y seis mañanas claras. ¿Cuántos días vacacionó? (Tuapanta, 2014).

4.23. Más dinero

"¿Más dinero? preguntó la madre y ayer mismo te di una buena suma. ¿Para qué necesitas tanto? ¿En qué lo has gastado?" "¿En qué he gastado? contestó el muchacho. Primero me quitaste un tercio..."

"¿Con qué querías que lavara la ropa si no había detergente?" "La mitad de lo que quedó se lo llevó Tom para comprar algo que él necesitaba". "Debes ser condescendiente con tu hermano mayor". "Lo fui. Quedó muy poquito y de ello cogió papá un cuarto. Luego María necesitó tres octavos del resto para comprar no sé que..."

"¿Y qué has hecho con el resto del dinero?"

"¿Con el resto? ¡No quedaron más que 85 centavos!"

¿Qué cantidad de dinero tenía al principio?

4.24. Cuadrado mágico

Se dice cuadrado mágico de orden tres a la siguiente tabla:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Tabla 4.1. Tabla mágica de 3x3

En la tabla 4.1, las letras representan números naturales de tal manera que la suma de las filas, columnas y de las diagonales es siempre constante e igual a s .

Demuestre que $s = 3e$.

4.25. Tabla mágica de polinomios

En las tablas de cada uno de los literales, escoja una fila (o columna), seleccione un polinomio y píntelo o encierre en un círculo, repita la misma acción con las demás filas (o columnas), al final en cada una de las filas y columnas debe quedar pintado o encerrado en un círculo un único polinomio.

a) En la tabla 4.2, la acción antes indicada repítala tres veces: tendrá tres polinomios pintados o con un círculo alrededor.

Sume todos ellos y compruebe que el polinomio resultante, factorizado, es igual a $(x + 5)(x + 7)$.

x^2	$2x^2+4x$	$2x^2 + 19$
$-x^2 + 8x$	$12x$	$8x + 19$
$-x^2 + 16$	$4x + 16$	35

Tabla 4.2. Tabla mágica de polinomios 3×3

b) En la tabla 4.3, la acción antes indicada repítala cuatro veces: tendrá cuatro polinomios pintados o con un círculo alrededor.

Sume todos ellos y compruebe que el polinomio resultante factorizado es igual a $(x + 2)(x + 7)(x - 3)$.

x^3	$-2x^3+x^2$	$-2x^3 - 10x$	$- 2x^3 - 30$
$3-x^3 + 5x^2$	$6x^2$	$5x^2 - 10x$	$5x^2 -30$
$3x^3 - 3x$	$x^2 - 3x$	$-13x$	$- 3x-30$
$3x^3 -12$	$x^2 -12$	$-10x - 12$	$- 42$

Tabla 4.3. Tabla mágica de polinomios 4×4

RAZONAMIENTO NUMÉRICO

4.26. Cuadrangular de fútbol

En un instituto, se celebró un torneo cuadrangular entre los equipos de los paralelos A, B, C y D. El caso curioso es que cada uno de los equipos metió un gol, y sin embargo la clasificación fue:

Paralelo A: cinco puntos Paralelo B: cinco puntos Paralelo C: tres puntos
Paralelo D: un punto

O sea, se metieron cuatro goles, y sin embargo se consiguieron 14 puntos entre todos.

¿Cómo se explica esto? ¿Cuáles fueron los resultados?

4.27. Vacas en el prado

Sabiendo que 81 vacas han comido en 15 días la hierba de un prado de 72 áreas y que 93 vacas han comido en 18 días la hierba de otro prado de 96 áreas, se desea saber cuántas vacas comerán en 24 días la hierba de un prado de 144 áreas.

Nota: se debe considerar que los tres prados contenían la misma cantidad de hierba por área, además debe suponer que todas las vacas consumen la misma cantidad.

4.28. La edad de las chicas

Tres chicas: Betty, María y Lorena dicen lo siguiente:

Betty: yo tengo 18 años, y dos menos que Lorena y uno más que María.

Lorena: no soy la más joven, María y yo tenemos tres años de diferencia. María tiene 21 años.

María: yo soy más joven que Betty. Betty tiene 19 años. Lorena tiene tres años más que Betty.

Determine la edad de cada una de las encantadoras chicas, sabiendo que únicamente una de las afirmaciones que hace cada persona es falsa.

4.29. Matriz mágica

En la tabla 4.4, escoja una fila (o columna), seleccione una matriz y píntela o encierre en un círculo, repita la misma acción con las demás filas (o columnas), al final en cada una de las filas y columnas debe quedar pintado o encerrado en un círculo una única matriz. Suma las cuatro matrices pintadas o encerradas en un círculo, y compruebe que la matriz resultante es

$$\begin{pmatrix} -23 & 33 \\ 19 & 65 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 11 \\ 16 & 21 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -24 & 17 \\ 14 & 21 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 14 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13 & -4 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 19 & 25 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -21 & 19 \\ 17 & 25 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & -14 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -26 & 9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -8 & -1 \\ -8 & 24 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -13 & 27 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 & 21 \\ -3 & 37 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -27 & 27 \\ -5 & 37 \end{pmatrix}$

Tabla 4.4. Tabla mágica de matrices

4.30. Tabla mágica numérica

En las tablas de cada uno de los literales, escoja una fila (o columna), seleccione un número y píntelo o encierre en un círculo, repita la misma acción con las demás filas (o columnas), al final en cada una de las filas y columnas debe quedar pintado o encerrado en un círculo un único número.

a) En la tabla 4.5, la acción antes indicada repítala ocho veces: tendrá ocho números pintados o con un círculo alrededor. Suma todos ellos y compruebe que resultado es igual a **-10**.

b) En la tabla 4.6, la acción antes indicada repítala cinco veces: tendrá cinco números pintados o con un círculo alrededor. Suma todos ellos y compruebe que

el resultado es igual a **-5**.

-3	10	0	-2	6	4	-0.5	-2.5
-3.5	9.5	-0.5	-2.5	5.5	3.5	-1	-3
-1	12	2	0	8	6	1.5	-0.5
-10.5	2.5	-7.5	-9.5	-1.5	-3.5	-8	-10
-14	-1	-11	-13	-5	-7	-11.5	-13.5
-6.5	6.5	-3.5	-5.5	2.5	0.5	-4	-6
-12	1	-9	-11	-3	-5	-9.5	-11.5
4.5	17.5	7.5	5.5	13.5	11.5	7	5

Tabla 4.5. Tabla mágica numérica 8x8

-2	-1	0	1	5
-1	0	1	2	6
-1.5	-0.5	0.5	1.5	5.5
-10	-9	-8	-7	-3
-3.5	-2.5	-1.5	-0.5	3.5

Tabla 4.6. Tabla mágica numérica 5x5

c) En la tabla 4.7, la acción antes indicada repítala ocho veces: tendrá ocho números pintados o con un círculo alrededor. Sume todos ellos y compruebe que el resultado es igual a **58**.

d) En la tabla 4.8, la acción antes indicada repítala ocho veces: tendrá ocho números pintados o con un círculo alrededor. Sume todos ellos y compruebe que el resultado es igual a **36**.

-4	12	23	-4	-5	57	-7	7
-13	3	14	-13	-14	48	-16	-2
2	18	29	2	1	63	-1	13
-11	5	16	-11	-12	50	-14	0
23	39	50	23	22	84	20	34
-35	-19	-8	-35	-36	26	-38	-24
32	48	59	32	31	93	29	43
-47	-31	-20	-47	-48	14	-50	-36

Tabla 4.7. Tabla mágica numérica 8x8

1	5	9	13	17	21	25	29
-2	2	6	10	14	18	22	26
-5	-1	3	7	11	15	19	23
-8	-4	0	4	8	12	16	20
-11	-7	-3	1	5	9	13	17
-14	-10	-6	-2	2	6	10	14
-17	-13	-9	-5	-1	3	7	11
-20	-16	-12	-8	-4	0	4	8

Tabla 4.8. Tabla mágica numérica 8x8

e) En la tabla 4.9, la acción antes indicada repítala diez veces: tendrá diez números con un círculo alrededor. Sume todos ellos y compruebe que el resultado es igual a **55**.

1	5	9	13	17	21	25	29	33	37
-2	2	6	10	14	18	22	26	30	34
-5	-1	3	7	11	15	19	23	27	31
-8	-4	0	4	8	12	16	20	24	28
-11	-7	-3	1	5	9	13	17	21	25
-14	-10	-6	-2	2	6	10	14	18	22
-17	-13	-9	-5	-1	3	7	11	15	19
-20	-16	-12	-8	-4	0	4	8	12	16
-23	-19	-15	-11	-7	-3	1	5	9	13
-26	-22	-18	-14	-10	-6	-2	2	6	10

Tabla 4.9 Tabla mágica numérica 10x10

-3	-1	1	3	5	7	9	11	13	15
-4	-2	0	2	4	6	8	10	12	14
-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11	13
-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10	12
-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11
-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10
-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9
-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7
-12	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6

Tabla 4.10. Tabla mágica numérica 10x10

f) En la tabla 4.10, la acción antes indicada repítala diez veces: tendrá diez números con un círculo alrededor. Sume todos ellos y compruebe que el resultado es igual a **15**.

SOLUCIONES A PROBLEMAS PROPUESTOS

4.1. El robo

Los ladrones son Miguel y Wilson, y los inocentes son Rubén, Jaime y Mario.

4.3. El robo de joyas

En el robo, el ama de llaves de la señorita Verónica se llevó la caja amarilla que contenía un collar de perlas y un anillo, y la caja verde que contenía una esclava y unos pendientes.

4.5. El herrero

La respuesta es que sí es posible hacer el trabajo abriendo y enlazando un número menor a siete anillos; basta con abrir y cerrar seis anillos.

4.7. La fiesta

La mujer de Henry es Dunia, y la de Franco es Betty.

4.13. La reunión

El dentista es Carlos y el publicista es Lalo.

4.15. Los cuatro hermanos

El dinero que tenían cada uno de los hermanos es: \$ 8, \$ 12, \$ 5 y \$ 20, respectivamente.

4.15. Tu edad y la mía

Mi edad es 40 años y la tuya es 6 años.

4.17. Las canicas

Sebastián al salir de casa tenía 378 canicas.

4.21. Las vacaciones

- a) El número de vacacionistas es 48.
- b) El número de vacacionistas en las diferentes disciplinas después de regis-

trados los cambios es: natación, 15; juego de cartas, 17; básquet, 6; e indor fútbol, 10.

c) El número de vacacionistas en las diferentes disciplinas antes de registrados los cambios es: natación, 19; juego de cartas, 11; básquet, 6 e indor fútbol: 12

4.23. Más dinero

El dinero que tenía al principio el muchacho era \$ 5,44.

4.27. Vacas en el prado

las vacas que comerán en 24 días la hierba de un prado de 144 son 117.

BIBLIOGRAFÍA

ALEGRÍA EZQUERRA, P. (2011). Magia y Matemáticas de la mano de Martín. Números 76: 19-29

MALBA, T. (2000). *El hombre que calculaba*, (14.^a ed). Barcelona, Verón.

PARRA, R. (2012). *Un paseo a través de la Matemática Recreativa*. Recuperado de [https://es.scribd.com/document/287506651/Un-Paseo-Atraves-de-Las-Matematicas- Recreativas](https://es.scribd.com/document/287506651/Un-Paseo-Atraves-de-Las-Matematicas-Recreativas)

PERELMAN, Y. (1968). *El divertido juego de las matemáticas*. Bogotá: Martínez Roca

PERELMAN, Y. (2015). *Álgebra recreativa*. Disponible en www.librosmaravillosos.com.

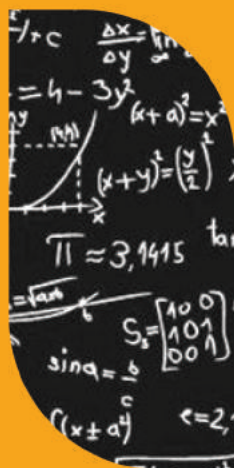
TUAPANTA, J. (2014). La matemática recreativa y su incidencia en el desarrollo del razonamiento lógico- matemático de los estudiantes de primer semestre de la Escuela de Diseño Gráfico de la Espoch. Riobamba: Espoch

SANTILLANA S. A. (2012). *Preparate para la U*. Tomo 1 y 2. Quito: Santillana

La Matemática lúdica, a través de los juegos recreativos de razonamiento lógico-matemático, pone a prueba nuestra capacidad de razonar, y aunque los problemas no se resuelven inmediatamente, es la constancia y darle vueltas y vueltas lo que permitirá encontrar la solución. Ningún problema es fácil, todos exigen concentración, dedicación y una gran capacidad razonativa.

El objetivo de este libro es contribuir con el desarrollo de la capacidad de razonamiento de los estudiantes de bachillerato y de aquellos que ingresan al curso de nivelación y primer semestre del nivel superior, para que potencien sus facultades de inteligencia; porque aquel que razona con eficacia es capaz de hallar los medios más seguros para resolver o desarrollar cualquier problema o actividad con eficiencia y efectividad.

Jorge Vinicio Tuapanta Dacto nació en Guano, provincia de Chimborazo. Es doctor en Matemática y Magister en Matemática Básica. Como parte de su experiencia docente, ha sido profesor del colegio Capitán Edmundo Chiriboga, profesor de la Universidad Particular de Loja y es docente de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, en la Facultad de Informática y Electrónica.



ISBN: 978-9942-35-169-2



9 789942 351692

